文章编号:1005-9865(2010)03-0050-09

基于改进 Boussinesq 方程三角形网格有限元模型

孙忠滨，柳淑学，李金宣
(大连理工大学 海岸和近海工程国家重点实验室，辽宁 大连　116024)

摘　要:基于改进型 Boussinesq 方程,建立适用于三角形网格的有限元模型。通过将边界点的笛卡尔坐标转化为法向、切向坐标,对与坐标轴斜交的反射边界进行处理,模型时间积分采用 Adams-Bashforth-Moulton 预报-校正法。一些经典算例的数值模拟结果表明,数值模型结果与其他数值或试验结果吻合较好,可以用于模拟不规则区域内波浪传播情况,而且通过三角形网格的应用,可有效处理不规则边界问题。

关键词:Boussinesq 方程;三角形单元;波浪数值模拟;不规则边界
中图分类号:P731.22　　**文献标识码**: A

Triangular element FEM model based on modified Boussinesq equations

SUN Zhong-bin, LIU Shu-xue, LI Jin-xuan
(State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: This paper describes the FEM model with unstructured triangular elements based on the modified Boussiensq equations. At the points of the boundary that the orientation of the boundary segment does not coincide with the global Cartesian axes, we introduce a locally rotated coordinate system to rotate the Cartesian coordinate to the new (n, T) coordinate system, in which n is aligned with the outward normal and T is the tangent at the boundary node. The Adams-Bashforth-Moulton predictor-corrector scheme is used for time integration. Several numerical simulations for test cases are employed to validate the model. By comparing the results with either experimental data or analytical solutions, the model is capable of giving satisfactory predictions, and accuracy was improved by use of unstructured triangular elements.

Key words: modified Boussinesq equations; triangular element; numerical wave simulation; irregular boundaries

海浪作为海岸泥沙运动、海岸变形等的重要影响因素,是海岸建筑物设计的主要条件之一,因此较准确模拟近岸区域内的波浪传播情况,对于确定海岸工程设计波浪条件具有重要意义。

目前国内外用于波浪数值模拟的理论模型较多,如 Navier-Stokes 方程、缓坡方程以及 Boussinesq 类水波方程等。Boussinesq 方程包含了弱非线性及色散性,可以较好地描述近岸波浪的演化。Peregrine[1]给出经典的 Boussinesq 方程,但该方程只适用于浅水,当 $h/L>0.2$ 时,方程所描述的波浪相速度的误差将大于5%。为了提高方程的适用范围,近年来关于 Boussinesq 方程的研究主要集中在如何提高方程的非线性和色散性上,为此研究人员提出了多种改进形式的 Boussinesq 方程。如 Madsen 等[2]、Nwogu[3]、Schäffer 和 Madsen[4]、Beji 和 Nadaoka[5]、林建国等[6]以及邹志利[7]等采用不同的处理方式给出改进的 Boussinesq 方程。

目前关于 Boussinesq 方程的数值求解,大多数采用有限差分法,如 Wei 和 Kirby[8]、Beji 和 Nadaoka[5]、Skotner 和 Apelt[9]、陈阳和严以新[10]、詹杰民和李毓湘[11]、周俊陶等[12]给出的有限差分求解 Boussinesq 方程模型。但是有限差分方法对于波浪传播计算中遇到的复杂边界问题处理不够方便,而有限元法由于其可较好

收稿日期:2009-09-07
基金项目:辽宁省教育厅科学技术研究创新团队资助项目;国家自然科学基金创新研究群体资助项目(50921001)
作者简介:孙忠滨(1980-),男,黑龙江人,博士,从事波浪数值模拟研究。E-mail: sunzhongbin321@163.com

地处理复杂边界而受到人们的重视,为此 Li 等[13]、柳淑学等[14]基于 Beji 和 Nadaoka 改进的 Boussinesq 方程的建立了有限元求解模型,提出了处理方程中三阶空间导数项的方法,但其模型采用四边形网格,实际应用不够灵活,同时模型中对于与坐标 x 或 y 轴斜交的边界处理存在一定问题;近来 Woo 和 Liu[15]基于 Nwogu 改进的 Boussinesq 方程,建立适用于三角形网格及不规则边界有限元求解模型。在柳淑学等所建立模型的基础上,采用三角形网格建立有限元求解模型,模型中对与坐标轴斜交反射边界进行了特殊处理,使得计算模型更适于实际波浪情况,典型波浪传播的模拟结果表明该模型可较好地模拟波浪的传播情况。

1　模型控制方程

在有限元数值模型中,高阶空间导数项的处理成为模型建立过程中的主要问题,考虑 Beji 和 Nadaoka 提出的 Boussinesq 方程连续方程仍保持守恒形式,只在动量方程中添加波面空间导数的三阶项,处理相对较方便,因此采用 Beji 和 Nadaoka 给出的改进的 Boussinesq 方程,即

$$\eta_t + \nabla \cdot [(h+\eta)\boldsymbol{u}] = 0 \tag{1}$$

$$\boldsymbol{u}_t + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + g\nabla\eta = (1+\beta)\frac{h}{2}\nabla[\nabla\cdot(h\boldsymbol{u}_t)] + \beta\frac{gh}{2}\nabla[\nabla\cdot(h\nabla\eta)] - (1+\beta)\frac{h^2}{6}\nabla[\nabla\cdot(\boldsymbol{u}_t)] - \beta\frac{gh^2}{6}\nabla[\nabla^2\eta] \tag{2}$$

式中:$\boldsymbol{u}=(u,v)$为沿深度平均的水平速度向量;η 为波面高度;$h=h(x,y)$为静水深;g 为重力加速度;∇ 为水平二维梯度算子;下标 t 表示对时间的偏导数,β 值取为 1/5。将时间导数项归并一起,式(1)和(2)按照标量形式可以写为如下形式:

$$\eta_t + \frac{\partial}{\partial x}(Hu) + \frac{\partial}{\partial y}(Hv) = 0 \tag{3}$$

$$r_t + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + g\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\beta gh}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial(hc)}{\partial x} + \frac{\partial(hd)}{\partial y}\right] + \frac{\beta gh^2}{6}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial d}{\partial y}\right) = 0 \tag{4}$$

$$s_t + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + g\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\beta gh}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial(hc)}{\partial x} + \frac{\partial(hd)}{\partial y}\right] + \frac{\beta gh^2}{6}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial d}{\partial y}\right) = 0 \tag{5}$$

$$u - \beta_1\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y}\right] + \beta_1\frac{h^2}{6}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right] = r \tag{6}$$

$$v - \beta_1\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y}\right] + \beta_1\frac{h^2}{6}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right] = s \tag{7}$$

式中:$\beta_1 = 1+\beta$,$H = h+\eta$,$c = \partial\eta/\partial x$,$d = \partial\eta/\partial y$。

2　有限元数值计算模型

2.1　有限元方程

设求解域为 Ω,取 W 为方程(3)到(7)的权函数,则其 Galerkin 加权余量式为:

$$\iint_\Omega \left[\eta_t + \frac{\partial}{\partial x}(Hu) + \frac{\partial}{\partial y}(Hv)\right] W\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \tag{8}$$

$$\iint_\Omega \left[r_t + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + g\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\beta gh}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial(hc)}{\partial x} + \frac{\partial(hd)}{\partial y}\right] + \frac{\beta gh^2}{6}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial d}{\partial y}\right)\right] W\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \tag{9}$$

$$\iint_\Omega \left[s_t + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + g\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\beta gh}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial(hc)}{\partial x} + \frac{\partial(hd)}{\partial y}\right] + \frac{\beta gh^2}{6}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial d}{\partial y}\right)\right] W\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \tag{10}$$

$$\iint_\Omega \left\{u - \frac{\beta_1 h}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y}\right] + \frac{\beta_1 h^2}{6}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right]\right\} W\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Omega rW\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{11}$$

$$\iint_\Omega \left\{v - \beta_1\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y}\right] + \frac{\beta_1 h^2}{6}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right]\right\} W\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Omega sW\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{12}$$

采用常规的有限元方程离散过程,由式(8)~(12)可以建立相应的有限元方程(详见柳淑学等[14])。为使数值模型可更有效的应用于大范围计算区域和复杂边界情况,模型单元采用线性三角形单元。由于方程中存在波面 η 的三阶空间导数项,而线性单元间一阶导数项不连续,因此在求解过程中需要确定各节点上

波面 η 的空间一阶导数项。假定 c_i 和 d_i 分别代表第 i 节点上波面的空间坐标 x 和 y 的一阶导数,其值由该节点周围单元内导数的加权平均来确定,即

$$c_i = \frac{1}{A_{Zi}^e}\sum_{j=1}^{N_i^e}\frac{1}{A_{ij}^e}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_{ij} \tag{13}$$

$$d_i = \frac{1}{A_{Zi}^e}\sum_{j=1}^{N_i^e}\frac{1}{A_{ij}^e}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)_{ij} \tag{14}$$

式中:N_e^i 表示节点 i 周围的单元数; A_{ij}^e为 i 点周围第 j 个单元面积;$A_{Zi}^e = \sum_{j=1}^{N_i^e}\frac{1}{A_{ij}^e}$为 i 点周围所有单元面积倒数之和;$(\frac{\partial\eta}{\partial x})_{ij}$和$(\frac{\partial\eta}{\partial y})_{ij}$分别为 i 节点相关的第 j 个单元内求得的 i 节点上波面 η 的一阶空间坐标 x 和 y 导数。

2.2 时间积分预报—校正法

时间积分采用 Adams-Bashforth-Moulton 预报—校正法。整理后方程(8)到(10)对应的有限元方程可统一表达为如下形式的方程:

$$[M]\{f\} = \{E\} \tag{15}$$

式中:$f = \eta$、r 或 s,$[M]$为总体质量阵,$\{E\}$为以 η, u, v, c 和 d 为变量的向量。

时间 t 离散为 $n\Delta t$,预报步采用四阶显式 Adams-Bashforth 法可得:

$$[M]\{\tilde{f}\}^{n+1} = [M]\{f\}^n + \frac{\Delta t}{24}[55\{E\}^n - 59\{E\}^{n-1} + 37\{E\}^{n-2} - 9\{E\}^{n-3}] \tag{16}$$

式中:顶标“~”表示为预报值。

在$(n+1)$步的预报值$\{\tilde{\eta}\}$,$\{\tilde{r}\}$,$\{\tilde{s}\}$,$\{\tilde{u}\}$和$\{\tilde{v}\}$求得后,即可算得向量$\{\tilde{E}\}$。校正步采用四阶 Adams-Moulton 法,即

$$[M]\{\tilde{f}\}^{n+1} = [M]\{f\}^n + \frac{\Delta t}{24}[9\{\tilde{E}\}^{n+1} + 19\{E\}^n - 5\{E\}^{n-1} + \{E\}^{n-2}] \tag{17}$$

波面$\{\eta\}^{n+1}$可以直接求得,$\{u\}^{n+1}$和$\{v\}^{n+1}$通过校正值$\{r\}^{n+1}$和$\{s\}^{n+1}$由方程(11)、(12)形成的方程组迭代求解[13-14]。

很明显,由前面时间步的变量值可以求得右端项,问题可以归结为求如下常规线性方程组

$$[M]\{x\} = \{F\} \tag{18}$$

式中:$\{x\}$表示欲求的未知向量$\{\tilde{f}\}$,$\{F\}$为方程(16)右端项求得的向量。方程(18)采用如下迭代方法求解,即

$$[\tilde{M}]\{x\}^{l+1} = ([\tilde{M}] - [M])\{x\}^l + \{F\} \tag{19}$$

式中:l 为迭代次数,$[\tilde{M}]$为一对角矩阵,其元素为

$$\begin{cases} \tilde{m}_{ki} = 0, \quad (k \neq i) \\ \tilde{m}_{kk} = \alpha m_{kk} \\ \alpha = [\sum_{k=1}^{ND}\sum_{i=1}^{ND} m_{ki}] \div [\sum_{k=1}^{ND} m_{kk}] \end{cases} \tag{20}$$

式中:ND 为节点总数,当相邻两步迭代误差为 $\max[x_k^{l+1} - x_k^l] \leqslant 0.001$ 时迭代结束。

很明显$(n+1)$时间步的波面预报值$\{\tilde{\eta}\}^{n+1}$可以由式(8)对应方程直接求得,$\{\tilde{u}\}^{n+1}$和$\{\tilde{v}\}^{n+1}$通过方程(11)、(12)迭代求解,初值取上一步求得结果。迭代过程中所形成的线性方程组的系数阵为非对称阵,采用双共轭梯度法[16]求解。当满足式(21)时,迭代结束,即

$$\Delta\tilde{u} = \frac{\sum_i(\tilde{u}_i - \tilde{u}_i^*)}{\sum_i \tilde{u}_i^2} \leqslant 0.001, \quad \Delta\tilde{v} = \frac{\sum_i(\tilde{v}_i - \tilde{v}_i^*)}{\sum_i \tilde{v}_i^2} \leqslant 0.001 \tag{21}$$

式中:$\tilde{u}_i$ 和 $\tilde{v}_i$ 为当前步的值,上标“*”表示上步迭代值。

方程的求解过程中只用到乘法运算,从而编程时采用索引存储法,只存储上述方程中二维矩阵的非零元素,可以大大节省计算机的内存。同时为了使计算稳定,需要满足 CFL 条件[13]:

$$c_w \frac{\Delta t}{\Delta l_{\min}} \leqslant 1 \tag{22}$$

式中:c_w 为波浪代表速度,不规则波浪可以取为谱峰频率的波速,Δt 为时间步长,$\Delta l_{\min}$为最小单元的代表尺度,取为三角形单元最小边长。根据计算经验,每个波长内的节点数应大于10个。

2.3 边界条件

2.3.1 全反射边界条件

全反射直墙边界上的法向速度应为0,即

$$un_x + vn_y = 0 \quad 或 \quad u \cdot n = 0 \tag{23}$$

式中:$n = (n_x, n_y)$为边界外法向单位矢量。对于与 x 轴平行的边界,应满足 $v = 0$,同理对于与 y 轴平行边界,应满足 $u = 0$,在上述有限元方程中较易处理。然而相对于坐标轴斜交的全反射边界,不能简单的确定该处 u 和 v 值。但该处法向速度仍为0,只需求解该处切向速度,因此在与 x、y 轴不平行的全反射边界点,将现有边界点的笛卡尔坐标做一转换[17],使得(x,y)坐标转为(n,T)坐标从而在边界点可求解切向动量方程。其中 $n = (n_x, n_y)$为法向向量,$T = (t_x, t_y)$为切向向量。在边界交点处,法向向量可按下式确定[15],即

$$n = \frac{n_1 + n_2}{\| n_1 + n_2 \|} \tag{24}$$

式中:n_1 和 n_2 分别为两相交边界各自法向向量。因此边界点处切向动量方程可写为

$$\begin{aligned} &T_x\{u + \beta_1 \frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}[\frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y}] + \beta_1 \frac{h^2}{6}\frac{\partial}{\partial x}[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}]\} + \\ &T_y\{v + \beta_1 \frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial y}[\frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y}] + \beta_1 \frac{h^2}{6}\frac{\partial}{\partial y}[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}]\} = T_x r + T_y s \end{aligned} \tag{25}$$

显然,边界处的速度满足式(23)和(25)条件,且若已求得 u(或 v)则可确定 v(或 u),为了避免 n_x、n_y 值太小而作为分母,现令边界点外法线与 x 轴正向的夹角为θ,将边界作如下划分处理。

当$(\frac{\pi}{4} < \theta \leqslant \frac{3\pi}{4})$或者$(\frac{5\pi}{4} < \theta \leqslant \frac{7\pi}{4})$时,有:

$$\begin{cases} \iint_\Omega \{(W + \frac{\beta_1}{2}W\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\beta_1}{2}h\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\beta_1}{6}Wh\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\beta_1}{3}h^2\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}) + \\ \quad \frac{T_y}{T_x}(\frac{\beta_1}{2}W\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\beta_1}{2}h\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\beta_1}{6}Wh\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\beta_1}{3}h^2\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x})\}u\mathrm{d}\Omega \\ \quad = -\iint_\Omega \{\frac{\beta_1}{2}W\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\beta_1}{2}h\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\beta_1}{6}Wh\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\beta_1}{3}h^2\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} + \\ \quad \frac{T_y}{T_x}(W + \frac{\beta_1}{2}W\frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial h}{\partial v} + \frac{\beta_1}{2}h\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\beta_1}{6}Wh\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\beta_1}{3}h^2\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y})\}v\mathrm{d}\Omega + \\ \quad \iint_\Omega rW\mathrm{d}\Omega + \frac{T_y}{T_x}\iint_\Omega sW\mathrm{d}\Omega \\ v = -\frac{1}{n_y}(n_x u) \end{cases} \tag{26}$$

当$(-\frac{\pi}{4} < \theta \leqslant \frac{\pi}{4})$或者$(\frac{3\pi}{4} < \theta \leqslant \frac{5\pi}{4})$时,有:

$$
\begin{cases}
\iint\limits_{\Omega}\{(W+\frac{\beta_1}{2}W\frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial h}{\partial v}+\frac{\beta_1}{2}h\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y}+\frac{\beta_1}{6}Wh\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\beta_1}{3}h^2\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y})+ \\
\frac{T_x}{T_y}(\frac{\beta_1}{2}W\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}+\frac{\beta_1}{2}h\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}+\frac{\beta_1}{6}Wh\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\beta_1}{3}h^2\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y})\}v\mathrm{d}\Omega \\
=-\iint\limits_{\Omega}\{(\frac{\beta_1}{2}W\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\beta_1}{2}h\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\beta_1}{6}Wh\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\beta_1}{3}h^2\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x})+ \\
\frac{T_x}{T_y}(W+\frac{\beta_1}{2}W\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\beta_1}{2}h\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\beta_1}{6}Wh\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\beta_1}{3}h^2\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x})\}u\mathrm{d}\Omega+ \\
\iint\limits_{\Omega}sW\mathrm{d}\Omega+\frac{T_x}{T_y}\iint\limits_{\Omega}rW\mathrm{d}\Omega \\
u=-\frac{1}{n_x}(n_y v)
\end{cases}
\tag{27}
$$

2.3.2 吸收边界条件(开边界)

为了避免在开边界处波浪反射回计算区域,保证计算精度,所用模型在吸收边界前面设置海绵层,对波浪进行衰减。采用 Larsen 和 Dancy[18]建议的方法,在海绵层内,每一时间步后,波面 η 和水平速度 (u,v) 除以 $\mu(x,y)$。参数 $\mu(x,y)$ 由下式确定

$$
\mu(x,y)=\begin{cases}\exp[(2^{-d/\Delta d}-2^{-d_s/\Delta d})\ln\alpha] & 0\leqslant d\leqslant d_s \\ 1 & d_s<d\end{cases}
\tag{28}
$$

式中:d 表示海绵层节点至边界的距离,Δd 表示单元典型尺寸,d_s 为海绵层宽度,α 为一常数,该处取为 4。

经过海绵层的吸收,仍会有较少波浪传至边界,但是反射波再传入计算区域之前还会再次通过海绵层,因此实际上只有很少的反射波浪能量能进入计算区域,实践表明,这部分反射波浪对计算结果影响不大,在边界前设置海绵层的方法能够达到吸收波浪的目的。

2.3.3 入射边界条件

在入射边界,给定入射波的波面 η_I,其沿水深的平均速度 (u,v) 可以通过下式求得。

$$
u_I=\frac{\omega}{kh}\eta_I\cos\theta,\quad v_I=\frac{\omega}{kh}\eta_I\sin\theta
\tag{29}
$$

式中:θ 为相对于 x 轴的波浪传播方向角。

为了消除由静止到水面波动引起的高频波动,采用类似于吸收边界处理方法对入射波浪的前一两个波进行人为衰减,使波浪逐渐增大传入计算区域。实践证明该方法能有效抑制这种高频波动的产生,衰减函数可写为

$$
\mu(x,y)=\begin{cases}\exp[(2^{-t/\Delta t}-2^{-t_s/\Delta t})\ln\alpha] & 0\leqslant t\leqslant t_s \\ 1 & t_s<t\end{cases}
\tag{30}
$$

式中:t_s 为进行人为衰减的总历时;α 为一常数,该处也取为 4。

3 模型验证

3.1 吸收边界效果验证

在数值计算中,一般应避免开边界处引起的反射波浪进入计算区域而污染计算区域,影响计算结果甚至使计算无法进行。为了观测吸收边界的处理效果,对规则波在水槽中传播进行了模拟。水槽长度为 15 m,宽度 0.8 m,常水深 $h=0.5$ m。计算采用 4 818 个单元,2 621 个节点。水槽左端为造波边界,右端为吸收边界,边界前设置 3 m 长海绵层吸收波浪。图 1 给出了波高 H 为 0.03 m,周期 T 为 1 s 的规则波在 49 ~ 50 s 不同时刻的计算结果。可见尽管波浪传播了较长时间,但是还能较好的符合给定波浪条件,说明本模型采用三角形网格后,仍然可以达到较高的精度。上述结果表明,模型中所用海绵层可以很好的起到吸收波浪的作用,进入计算区域内反射波浪很小,对计算结果影响不大。

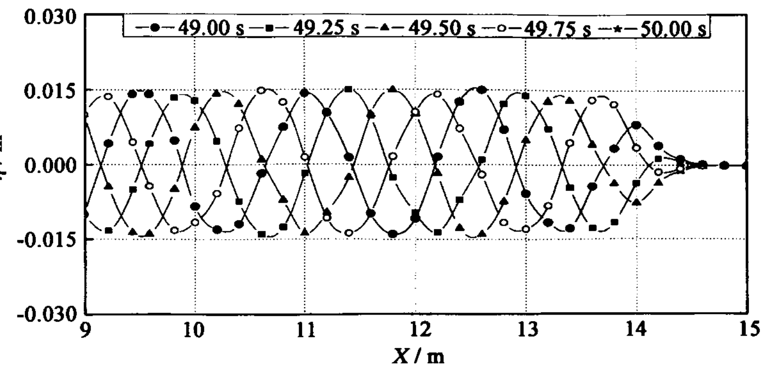


图 1 规则波($H = 0.03$ m, $T = 1.0$ s)

Fig. 1 Regular wave($H = 0.03$ m, $T = 1.0$ s)

3.2 孤立波的传播计算

为了检验计算模型的稳定性和守恒性,对孤立波长距离传播进行了模拟。波浪水槽的长度为 200 m,计算采用 36 002 个单元,20 010 个节点,常水深 $h = 0.45$ m,入射波高为 0.015 m。图 2 给出了不同时刻数值结果和理论结果的比较情况,可见符合情况很好。说明所用模型稳定性和守恒性较好,可以适用于长时间波浪计算模拟,同时模型采用线性三角形单元,精度也能满足要求。

3.3 封闭方形水池中的水面晃动

为了验证本模型全反射边界的模拟情况,对封闭方形水池中水面晃动情况进行了模拟。方形水槽尺寸为 7.5 m×7.5 m($L_x \times L_y$),常水深 $h = 0.45$ m。水池四边为全反射直墙且与 x、y 轴平行,坐标原点位于水池一角。为了验证模型对相对于坐标轴不同斜向边界的适用性,保持坐标轴不变分别将计算水池绕原点逆时针转动 0°(case1),30°(case2),60°(case3),并对三种形状水池内液体晃动情况进行了计算,计算分别采用 12 612、22 510 和 22 510 个单元,初始波面取 $\eta_0(x, y)$ 为 Gaussian 形,即

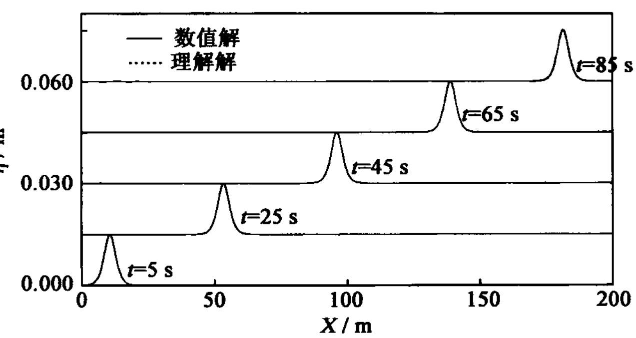


图 2 不同时刻孤立波波面曲线

Fig. 2 Spatial profiles of solitary wave at various moments

$$\eta_0(x', y') = H_0 \exp\{-2[(x' - a)^2 + (y' - b)^2]\} \tag{31}$$

式中:$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$, $y' = x\sin\theta + y\cos\theta$, $a = 3.75\cos\theta - 3.75\sin\theta$, $b = 3.75\sin\theta + 3.75\cos\theta$, θ 为计算区域绕原点逆时针旋转角度,H_0 分别取为 0.045 m 和 0.45 m。

图 3 和图 4 分别给出了 $H_0 = 0.045$ m 和 $H_0 = 0.45$ m 两种情况的角点和中心点模拟计算结果和线性理论结果相比较。对于 $H_0 = 0.045$ m 的情况,由于其非线性较弱,数值结果与线性理论结果吻合较好,说明采用三角形网格计算模型精度满足要求。由图 4 可以看出,$H_0 = 0.45$ m 时,由于其非线性影响较大,用线性理论计算的结果和本数值模拟结果有较大差别。由于非线性影响,波峰有变尖窄,波谷有变坦的趋势,并且波动的相位产生一定差别,这与 Wei 和 Kirby[8]用差分及柳淑学等[14]用四边形单元有限元求解的结果是一致的。图 5 同时给出了 $H_0 = 0.045$ m 和 $H_0 = 0.45$ m 时不同转动角度在 $t = 20$ s 时的波面分布。从图 3 ~ 5 结果可见,三种不同角度情况模拟结果基本一致,说明本模型对于与坐标斜交的反射边界处理是有效的。

3.4 椭圆形浅滩上波浪折绕射计算

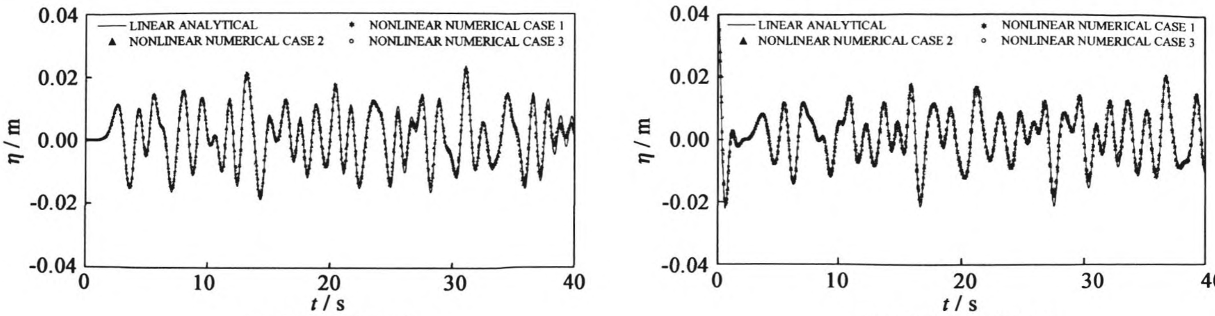
为了检验本模型对波浪绕射折射模拟情况,对 Berkhoff 等[19]所做的椭圆形浅滩上的波浪折、绕射物理模型试验进行了数值模拟。计算区域长度为 24 m,宽度为 20 m,坐标原点取在椭圆形浅滩的中心,区域内的水深为

$$h = h_s = \begin{cases} 0.45 & x' < -5.82 \\ 0.45 - 0.02(5.82 + x') & x' > -5.82 \end{cases} \tag{32}$$

河滩边界为$(x'/3)^2 + (y'/4)^2 = 1$,河滩上水深满足下式

$$h = h_s - 0.5[1 - (x'/3.75)^2 - (y'/5)^2] + 0.3$$

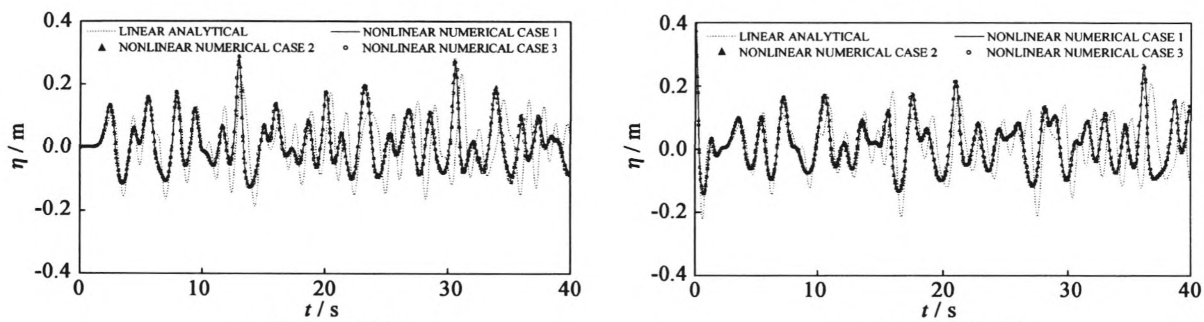
式中：$x' = x\cos20° + y\sin20°$，$y' = -x\sin20° + y\cos20°$，地形分布如图6。



(a) 角点结果比较 (b) 中心点结果比较

图3 $H_0 = 0.045$ m时波面时间过程与线性理论计算结果的比较

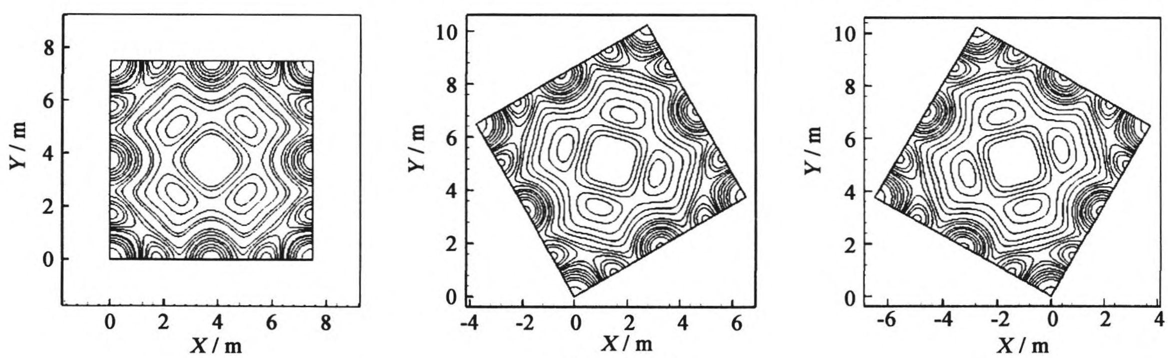
Fig. 3 Comparison between numerical simulation and theoretical results for $H_0 = 0.045$ m



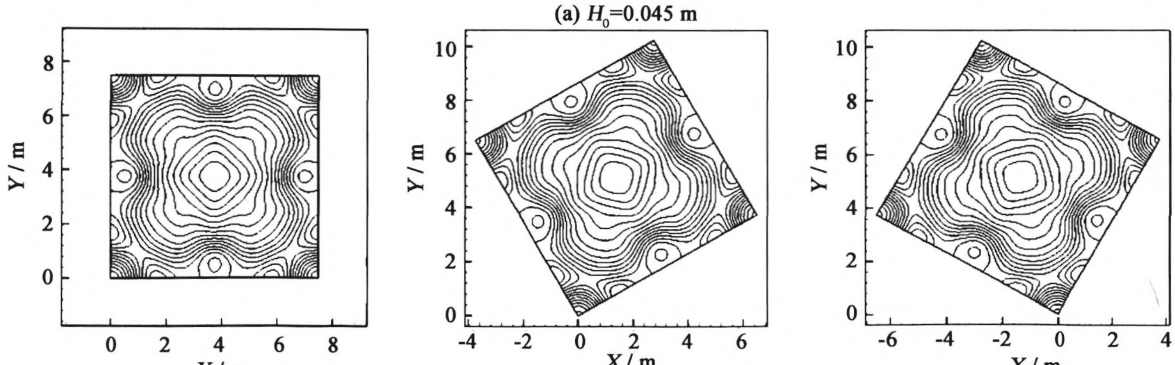
(a) 角点结果比较 (b) 中心点结果比较

图4 $H_0 = 0.45$ m时波面时间过程与线性理论计算结果的比较

Fig. 4 Comparison between numerical simulation and theoretical results for $H_0 = 0.45$ m



(a) H_0=0.045 m



(b) H_0=0.45 m

图5 不同转动角度在 $t = 20$ s时的波面分布

Fig. 5 Free-surface contours at time $t = 20$ s for different cases

模拟波浪入射波高为 $H_0 = 0.464$ m,周期 $T = 1$ s,沿 x 轴正向入射。上下两边界($y = -10$ m 和 $y = 10$ m)为全反射边界,海绵层位于右侧边界,宽度为 2 m。计算采用 89 894 个三角形单元,45 348 个节点。图 6 同时给出了 $t = 30$ s 时刻区域内波面分布情况,可见波浪折射现象比较明显,模型可以较好的描述波浪传播运动。图 7 为不同断面数值结果与试验结果以及 Woo 和 Liu[15]的数值计算结果的比较。从图中可以看出,两种数值计算结果基本一致,其差别可能是由于二者所采用的控制方程不同引起的。同时数值计算结果与试验结果符合较好,说明所用三角形单元有限元模型可以较好地模拟波浪的折射传播运动。

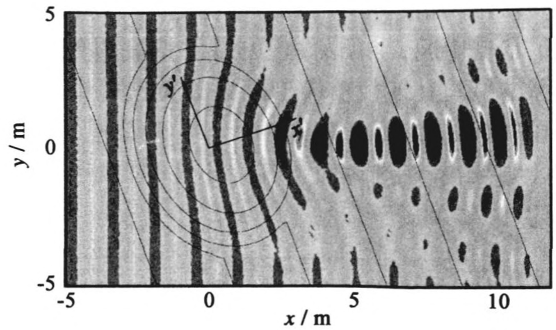


图 6　地形水深等值线及 $t = 30$ s 波面轮廓

Fig. 6　Contour of the water depth and the free-surface elevation at time $t = 30$ s

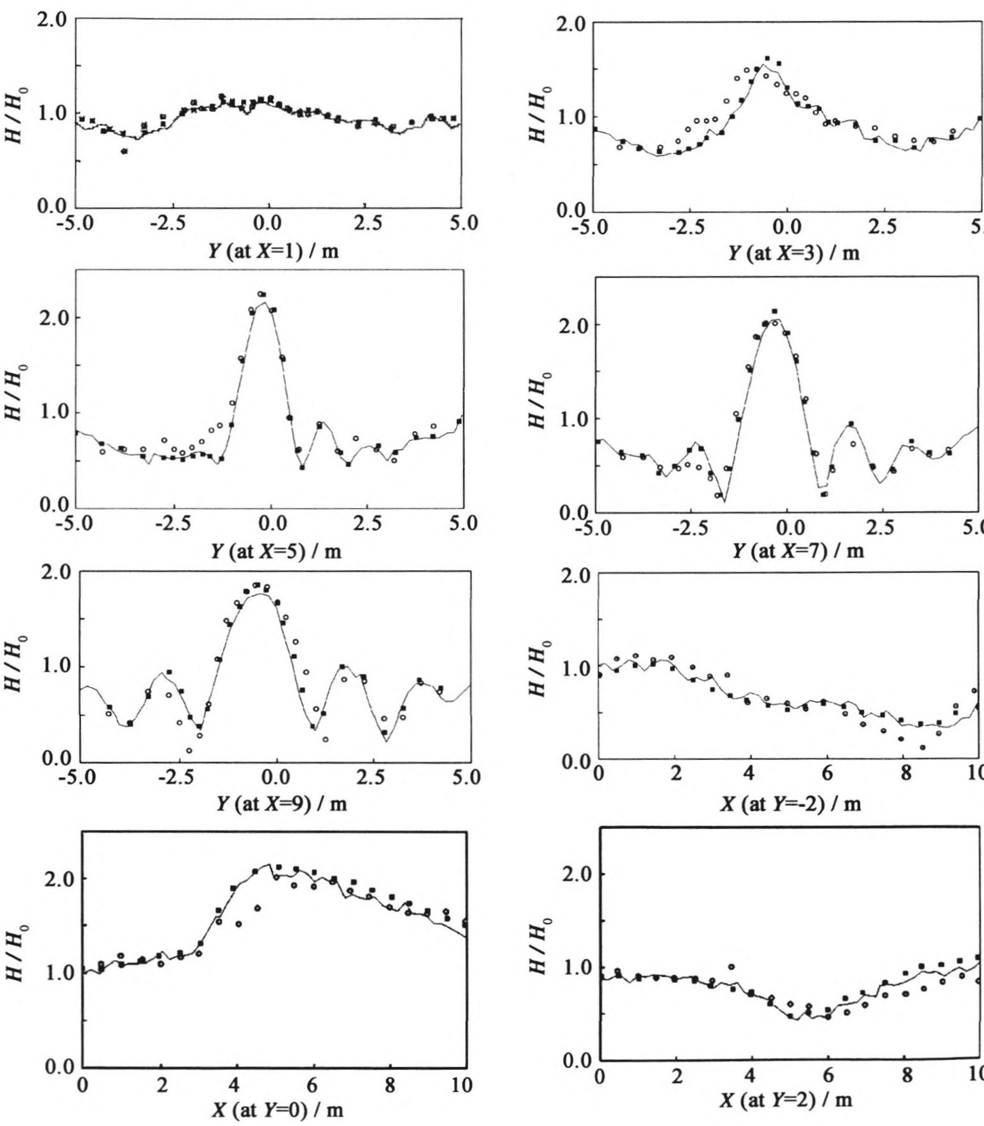


图 7　椭圆形浅滩上个断面波高比较

Fig. 7　Comparisons of wave heights along specified sections

3.5　圆柱周围波浪涌高计算

为了验证模型对复杂边界的有效性,对 Isaacson[19]关于圆柱爬高的物理模型试验情况进行了模拟。图 8 为计算区域网格剖分情况,共 7 047 个三角形单元,3 641 个节点。为了更好的模拟圆柱边缘波浪情况,在圆

柱边界处对网格进行了加密,这也是三角形网格的优势之一。水槽长6.4 m,宽3.4 m,常水深 $h=0.08$ m,圆柱位于水槽中间,半径 $r=0.25$ m。造波边界位于左侧,右侧边界设置宽度为1.5 m的海绵层。图9为数值解计算结果与其他数值模型结果以及试验结果的比较。Li 等[13]计算该算例,将圆柱边界处的速度 u、v 都取为0,这种近似对计算结果产生一些影响,相比较而言,本模型由于对与坐标轴斜交的全反射边界进行处理,可以适用于任意方向边界计算,同时加密了圆柱边界附近的计算网格,因此所得结果更加接近试验所测得结果。

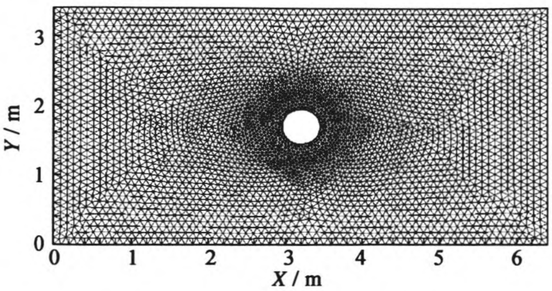


图8 圆柱周围波浪爬高计算区域网格剖分

Fig. 8 Finite-element mesh for wave run-up around the circular cylinder

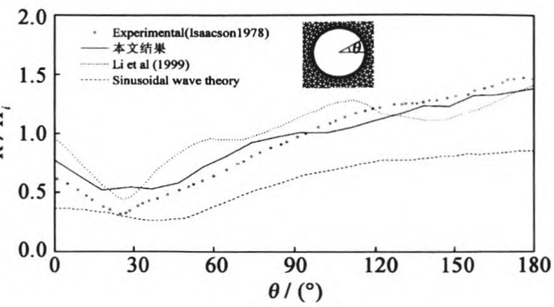


图9 圆柱周围波浪爬高结果比较

Fig. 9 Comparison of wave run up around the circular cylinder

4 结 语

基于 Beji 和 Nadaoka 提出改进的 Boussinesq 方程,建立了求解波浪传播的数值计算模型。为了更好的模拟不规则区域内波浪传播情况,着重对全反射边界进行了处理,尤其对于与坐标轴斜交的边界,采用坐标转换的方法,建立边界切向方程,从而可较精确地计算边界处波浪速度,提高波浪传播的模拟精度。同时模型采用三角形网格,可以充分利用有限元方法对边界适用性强以及局部可加密的优点,使得模型具有更好的适应性。典型算例结果表明,建立的数值计算模型,对于复杂边界具有很好的适应性,并可以很好的模拟非线性波浪的传播运动。

参考文献:

[1] Peregrine D H. Long wave on a beach[J]. J. Fluid Mech., 1967, 27: 815 - 827.

[2] Madsen P A, Murray R, Sϕrenson O R. A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics: Part 2. A slowly-varying bathymetry[J]. Coastal Eng, 1992, 18: 183 - 204.

[3] Nwogu O. Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation[J]. J. Waterw., Port, Coastal and Ocean Eng, 1993, 119(6): 618 - 638.

[4] Schäffer H A, Madsen P A. Further enhancements of Boussineaq type equations[J]. Coastal Eng, 1995, 26: 1 - 14.

[5] Beji S, Nadaoka K. A formal derivation and numerical modeling of the improved Boussinesq equations for varying depth[J]. Ocean Eng, 1996, 23(8): 691 - 704.

[6] 林建国,邱大洪,邹志利. 新型 Boussinesq 方程的进一步改善[J]. 海洋学报, 1998, 20(2): 113 - 119.

[7] 邹志利. 高阶 Boussinesq 水波方程的改进[J]. 中国科学: E辑, 1999, 29(1): 87 - 96.

[8] Wei G, Kirby J T. Time-dependent numerical code for extended Boussinesq equations[J]. J. Waterway., Port, Coast, Ocean Eng, ASCE, 1995, 121(5): 251 - 261.

[9] Skotner C, Apelt C J. Internal wave generation in an improved two-dimensional Boussinesq model[J]. Ocean Eng., 1999, 26(4): 287 - 323.

[10] 陈 阳,严以新. Boussinesq 方程波浪数学模型的应用[J]. 海洋工程, 1999, 17 (4): 85 - 94.

[11] 詹杰民,李毓湘. 求解高阶 Boussinesq 方程数值方法的研究[C]//第十六届全国水动力学研讨会论文集. 北京:海洋出版社, 2002.

[12] 周俊陶,林建国,谢志华. 高阶 Boussinesq 类方程数值求解及试验验证[J]. 海洋工程, 2007, 25(1): 88 - 92.

(下转第67页)

[11] Suh K D, Lee C, Park W S. Time-dependent equations for wave propagation on rapidly varying topography[J]. Coastal Engineering, 1997, 32:91 - 117.

[12] 左其华,姚国权,丁炳灿. 摩阻地形上的波浪折射和绕射[J]. 港口工程,1993(1):35 - 40.

[13] 洪广文. 波浪折射、绕射数学模型[C]//第七届全国海洋工程学术讨论会论文集. 北京:海洋出版社,1994:808 - 815.

[14] 潘军宁,洪广文,左其华. 一种推广的缓坡方程[J]. 海洋工程,2001,19(1):24 - 31.

[15] Hsu T W, Wen C C. On radiation boundary conditions and wave transformation across the surf zone[J]. China Ocean Engineering, 2001, 15(3):395 - 406.

[16] Dally W R, Dean R G, Dalrymple R A. Wave height variation across beaches of arbitrary profile[J]. Journal of Geophysical Research, 1985, 90(C6):11917 - 11927.

[17] Goda Y. A synthesis of breaker idices[J]. Transactions of Japan Soc. Civ. Eng. JSCE, 1970, 2:227 - 230.

[18] 张洪生,商　辉. 对波浪入射边界上反射波的消波及其验证[J]. 上海交通大学学报,2008,42(4):674 - 678.

[19] 洪广文,张洪生. 任意水深变化水域非线性波数值模拟[J]. 海洋工程,1999,17(4):64 - 73.

[20] Berkhoff J C W, Booy N, Radder A C. Verification of numerical wave propagation models for simple harmonic water waves[J]. Coastal Engineering, 1982, 6:255 - 279.

[21] Davies A G, Heahtershaw A D. Surface-wave propagation over sinusoidally varying topography[J]. J. Fluid Mesh., 1984, 144:419 - 443.

(上接第58页)

[13] Li Y S, Liu S-X, Yu Y-X, et al. Numerical modeling of Boussinesq equations by finite element method[J]. Coastal Eng., 1999, 37: 97 - 122.

[14] 柳淑学,俞聿修,赖国璋. 等. 数值求解 Boussinesq 方程的有限元法[J]. 水动力学研究与进展:A 辑,2000, 15(4): 399 - 410.

[15] Woo S -B, Liu P L-F. Finite-element model for modified Boussinesq equations. I: Model development[J]. J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng, 2004, 130(1): 1 - 16.

[16] Howard D, Connolley W M, Rollett J S. Unsymmetric conjugate gradient methods and sparse direct methods in finite element flow simulation[J]. Int. J. Numer. Methods Fluids, 1990, 10:925 - 945.

[17] Engelman M S, SaniJ L, Gresho P M. The implementation of normal and/or tangential boundary condition in finite element codes for incompressible fluid flow[J]. Int. J. Numer. Methods Fluids, 1982(2): 225 - 238.

[18] Larsen J, Dancy H. Open boundaries in short wave simulations-a new approach[J]. Coastal Engineering, 1983(7):285 - 297.

[19] Berkhoff J C W, Booy N, RadderA C. Verification of numerical wave propagation models for simple harmonic linear water waves[J]. Coastal Eng., 1982(6):255 - 279.

[20] Isaacson M de St Q. Wave runup around large circular cylinder[J]. Journal of the Waterway, Port, Coastal and Ocean Division, 1978, 104(1):69 - 79.