

GPS 大地水准面拟合模型研究

王 昶, 王 旭

(辽宁工程技术大学 测绘与地理科学学院, 辽宁 阜新 123000)

摘 要:在调兵山地区,选择已用 GPS 定位技术求得大地高的 76 个已知点作为原始数据的基础上,采用两种数学模型建立大地水准面,模型包括二次曲面法和最小二乘配置法,这两种模型是在不分区拟合和分区拟合两种情况下进行的。通过实例发现,拟合点的选取及位置对拟合模型有很大影响,在平坦地区,采用不分区拟合时,二次曲面法和最小二乘配置法的模型所求的检验点高程异常的精度要好于分区拟合时的情况,二次曲面法比最小二乘配置法在求高程异常时精度要高,而在分区拟合和不分区拟合时都能满足精度要求。

关键词:高程异常;二次曲面;最小二乘配置;分区拟合

中图分类号:P228.4 文献标识码:A 文章编号:1006-7949(2009)04-0043-04

Study on fitting model of GPS geoid

WANG Chang, WANG Xu

(College of Surveying and Geographical Science, Liaoning Technical University, Fuxin 123000, China)

Abstract: In Diaobingshan area, using 76 points which acquire geodetic height by GPS positioning technology known as the raw data, we create a mathematical model geoid, including quadric surface, least squares collocation method. One of these two models are fitted in the district and the district does not fit the two cases. Through examples we found that fitting points and the selected location of the fitting models have great impact. In the flat areas, when using non-Subregional Fitting, quadric surface and least squares collocation we can acquire height anomaly better than in Subregional Fitting situation, and Subregional Fitting and Not-Subregional Fitting can meet the requirements of precision.

Key words: height anomaly; quadric surface; least squares collocation; Subregional Fitting

1 高程系统及其转换关系

高程系统有大地高、正高和正常高系统,其关系如图 1 所示。大地高系统是以地球椭球面为基准面的高程系统^[1],是地面一点沿参考椭球面的法线到参考椭球面的距离,一般用符号 H 表示。正高系统是以大地水准面为基准面的高程系统,是地面点沿通过该点的铅垂线至大地水准面的距离,用符号 H_g 表示。正常高系统是以似大地水准面为基准的高程系统,是地面点沿通过该点的垂线方向到似大地水准面的距离,用 H_r 表示。我国规定采用正常高高程系统作为我国高程的统一系统。

大地水准面到地球椭球面的距离称为大地水准面差距,记为 N ,大地高与正高之间的关系可表示为

$$H = H_g + N. \quad (1)$$

似大地水准面和参考椭球面之间的距离,称为高程异常,记为 ζ ,大地高与正常高之间的关系可表示为

$$H = H_r + \zeta. \quad (2)$$

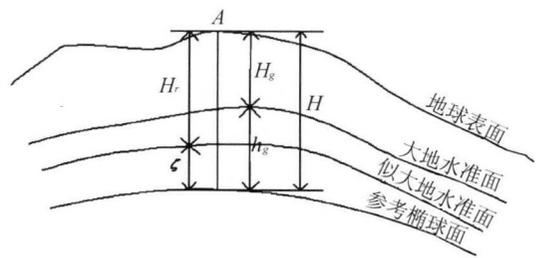


图 1 大地高、正高、正常高三者关系

2 GPS水准拟合面的建立

在一定区域内,选择已用GPS定位技术求得其大地高的一部分点,并用常规的水准测量方法求出其正常高,按式(2)求出它们的高程异常,然后用求出已知点的高程异常来构造这个地区的似大地水准面,用构造的似大地水准面来检验剩余已知点的高程异常,并与它们的高程异常作比较,最终确定该地区的拟合水准面^[2]。

2.1 二次曲面法

如果有 n 个观测值 (n 个联测了水准的GPS点),则可列出 n 个误差方程式^[3]

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 + V_1 &= a_0 + a_1x_1 + a_2y_1 + a_3x_1y_1 + a_4x_1^2 + a_5y_1^2, \\ \xi_2 + V_2 &= a_0 + a_1x_2 + a_2y_2 + a_3x_2y_2 + a_4x_2^2 + a_5y_2^2, \\ &\dots \\ \xi_n + V_n &= a_0 + a_1x_n + a_2y_n + a_3x_ny_n + a_4x_n^2 + a_5y_n^2. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中: ξ 表示已知高程异常值, x 、 y 表示已知高程拟合点的平面坐标值, a_0, a_1, \dots, a_5 为所求参数,各项的矩阵表达式为

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 & x_1^2 & y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 & x_2^2 & y_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n & x_ny_n & x_n^2 & y_n^2 \end{pmatrix}.$$

则误差方程的矩阵形式为

$$\xi + V = XA. \quad (4)$$

令 $\hat{A} = A^0 + \hat{a}$, $l = \xi - XA^0$, 式中: A^0 为参数的近似值,于是得误差方程为

$$V = X\hat{a} - l. \quad (5)$$

按最小二乘原理,式(5)的 \hat{a} 必须满足 $V^T PV = \min$ 的要求,其中 P 为权阵,求偏导得

$$\frac{\partial V^T PV}{\partial \hat{a}} = 2V^T PV \frac{\partial V}{\partial \hat{a}} = V^T PX.$$

转置后得

$$X^T PV = 0. \quad (6)$$

解得

$$\hat{a} = (X^T PX)^{-1} X^T Pl. \quad (7)$$

最后求得

$$A = (a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5)^T. \quad (8)$$

二次曲面的最终形式为

$$\xi = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2. \quad (9)$$

2.2 最小二乘配置法

最小二乘配置的函数模型一般是

$$L = DX + GY + \Delta. \quad (10)$$

式中: L 为观测向量, Δ 为观测噪声, $\Delta \sim N(0, D_\Delta)$, Y 为倾向参数(非随机参数), X 为滤波信号(随机参数),另外还有未观测点推估信号 X' ,则式(10)也可表示为

$$L = DX + GY + \Delta. \quad (11)$$

式中: $C = [B \ 0]$, $Z = \begin{bmatrix} X \\ X' \end{bmatrix}$ 。

已知先验信息 $E(X) = u_x$, $\text{var}(X) = D_x$, $E(X') = u_{x'}$, $\text{var}(X') = D_{x'}$,而 X 和 X' 的协方差为 $D_{XX'} = D_{x'x}^T$,实际应用中,噪声 Δ 与 X 、 X' 是相互独立的,即 $D_{\Delta X} = 0, D_{\Delta X'} = 0$ 。

式(11)对应的误差方程为

$$V = CZ + GY - L. \quad (12)$$

根据最小二乘原理有

$$V^T P_\Delta V + V_Z^T P_Z V_Z = \min. \quad (13)$$

式中: V 是观测值 L 的改正数, V_Z 是 Z 的先验期望 $E(Z)$ 的改正数,从而推得

$$\hat{Y} = [G^T(D_\Delta + BD_X B^T)^{-1}G]^{-1}G^T(D_\Delta + BD_X B^T)^{-1}(L - Bu_x), \quad (14)$$

$$\hat{X} = u_x + D_X B^T(D_\Delta + BD_X B^T)^{-1}(L - G\hat{Y} - Bu_x), \quad (15)$$

$$\hat{X}' = u_{x'} + D_{X'X} B^T(D_\Delta + BD_X B^T)^{-1}(L - G\hat{Y} - Bu_x). \quad (16)$$

若设 $B = I$ (单位阵), $u_x = 0, u_{x'} = 0$ 且不考虑噪声误差,即 $D_\Delta = 0$,则式(14)、式(15)、式(16)可表示为

$$\hat{Y} = (G^T D_X^{-1} G)^{-1} G^T D_X^{-1} L, \quad (17)$$

$$\hat{X} = D_X D_X^{-1} (L - G\hat{Y}), \quad (18)$$

$$\hat{X}' = D_{X'X} D_X^{-1} (L - G\hat{Y}), \quad (19)$$

从而求得未测点的平差值

$$\hat{L}' = G\hat{Y} + \hat{X}'. \quad (20)$$

2.3 分区拟合法

若拟合区域较大,可采用分区拟合的方法,即将整个GPS网划分为若干区域,利用位于各个区域中的已知点分别拟合出该区域中各点的高程异常值,从而确定出他们的正常高。图2是一个分区拟合示意图,拟合分两个区域进行,以虚线为界,位于虚线

上的已知点两个区域都采用^[4-5]。

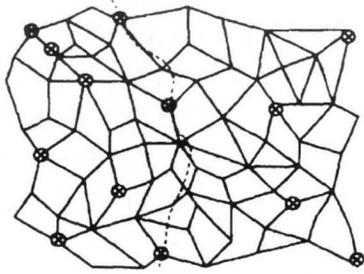


图2 分区拟合示意图

3 算例与分析

3.1 数据的来源

使用4台Ashtech GPS接收机进行观测,采用同步环混联方式布网,静态观测方法,同步观测1 h,每点上站2次,进行三等网同步环观测^[6]。四等GPS平面网采用双基准混合扩展方式布网,运用快速静态观测方法,同步观测30 min,每点上站2次,期间联测附近的部分三等点,用以作为起算和检核数据。

3.2 不分区拟合

在整个测区的76个大地高和正常高都已知的点中,选择一些已知点作为内符合点,另一部分已知点作为外检验点,在选点的过程中,发现内符合点的数量和位置对拟合精度有很大影响,见图3、图4。



图3 选点方案1
(·为内拟合点)



图4 选点方案2
(·为内拟合点)

表1 两个方案的内符合点中误差比较 mm

拟合模型	$\delta_{内}/\delta_{外}$	$\delta_{内}/\delta_{外}$
	方案一	方案二
二次曲面	18.1/197.2	11.2/17.4
最小二乘配置	17.8/196.4	10.8/16.4

按照方案2(见图4)的选点方法选出了39个内符合点、37个外检验点,通过表1看到,最小二乘配置法比二次曲面法对求高程异常值的精度要高些,但由于最小二乘配置在编程方面比较麻烦,占用计算机,所以采用二次曲面法作为拟合模型。

3.3 分区拟合

由图5看出,把整个测区分成A、B两个区域,对每个测区采取图3的分点方式,在A、B两区都选择了21个点作为内符合点,23个点作为外检验点,见图6、图7、表2。

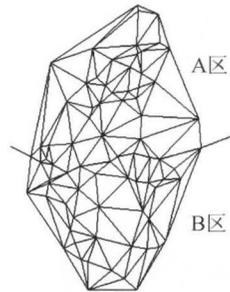


图5 分区拟合图

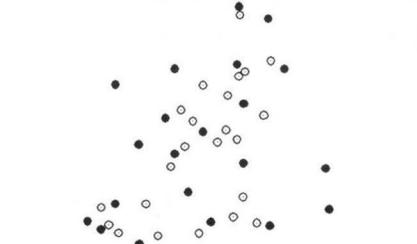


图6 A区拟合点位图(·为内拟合点)

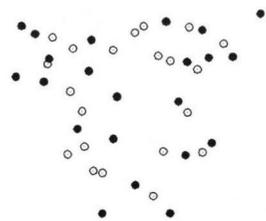


图7 B区拟合点位图(·为内拟合点)

表2 分区拟合内外拟合精度比较

拟合模型	$\delta_{内}/\delta_{外}$	$\delta_{内}/\delta_{外}$
	A区	B区
二次曲面	16.2/15.5	12.6/13.9
最小二乘配置	14.1/13.5	12.4/13.8

从图3、图4、表1中能够看出,方案1的选点方法是不合理的,其外检验点的拟合中误差超过四等水准最弱点相对于起算点的高程中误差2 cm的要求^[7-8],而方案2(图4)中点的数量和点的位置分布均匀,几乎覆盖了整个测区,其内外拟合精度达到要求。

从图 6、图 7、表 2 可以看出,点位的分布以及各区域的内外拟合精度中误差都满足要求,在分区进行拟合的时候,最小二乘配置的拟合精度略高于二次曲面模型的拟合精度。

3.4 外业检核

在整个测区内选择 12 个未知点作为检测点, A、B 两个区各选 6 个点,采用 GPS 定位技术和常规水准测量测出 12 个未知点的大地高和正常高,两高相减为 12 个未知点的高程异常。

在分区拟合时,两种数学模型分别求出 A 区和 B 区各 6 个未知点的高程异常。在不分区拟合时,用两种数学模型求出 12 个未知点的高程异常,如图 8 所示。

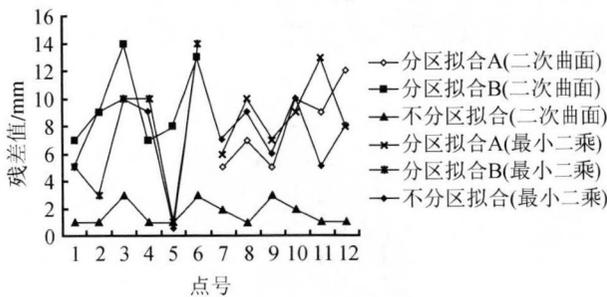


图 8 12 个检验点高程异常残差统计图

由图 8 看出在不分区的情况下,二次曲面法和最小二乘配置法求 12 个未知点的高程异常值的精度要比分区的情况所求的高程异常精度高些,在不分区的情况下,二次曲面模型求出未知点高程异常的精度要好于最小二乘配置模型的精度。

4 结 论

通过分区拟合和不分区拟合所求的高程异常精度分析,得出如下结论:

1)在不分区拟合时,对于拟合点的选择至关重要,在整个测区内,要尽量选择边界的点作为内拟合

点,然后在区域内选择内插点,这样在整个区域内点的分布均匀,拟合效果要好些。

2)在不分区拟合时,最小二乘配置和二次曲面两种拟合方法在求高程异常时都满足精度要求,但最小二乘配置在求检验点的时候,精度效果没有二次曲面模型好,而且最小二乘配置法在编程上比较困难,占用计算机,综合考虑,在这个地区用二次曲面模型作为水准拟合面。

3)在分区拟合时,两种数学模型在两个区域内的内拟合精度要比不分区时的内拟合精度要高,而外拟合精度却相反。同时,两种数学模型在检验 12 个检验点的时候,12 个点的残差要大于不分区时,但也满足精度要求。

4)对于地势平坦的地区来说,如果在不分区拟合的情况下,已经达到很高的精度了,就没有必要用分区拟合法,一般在高山地区或地势高低起伏的地区用分区拟合法效果要好些。

参考文献

- [1]姚吉利,褚丽丽,于志路. GPS 水准面拟合方法研究[J]. 测绘工程,2005(4):23-26.
- [2]张正禄,邓 勇,罗长林. 利用 GPS 精华区域似大地水准面[J]. 大地测量与地理动力学,2006(11):14-15.
- [3]武汉测绘科技大学测量平差教研室. 测量平差基础[M]. 北京:测绘出版社,2001.
- [4]孙正明,高井祥,王 坚. 最小二乘配置法在 GPS 高程异常推估的应用[J]. 测绘科学,2007(6):102-103.
- [5]宁津生,刘经南,陈俊勇. 现代大地测量理论与技术[M]. 武汉:武汉大学出版社,2006.
- [6]乔仰文,赵长胜,夏春林. GPS 卫星定位原理及其在测绘中的应用[M]. 北京:教育科学出版社,2003.
- [7]张凤举,张华海,赵长胜. 控制测量学[M]. 北京:煤炭工业出版社,1999.
- [8]高 伟,卢秀山. GPS 高程区域似大地水准面的分区拟合与平滑连接[J]. 测绘通报,2000(7):11-12.

[责任编辑:郝丽英]