0254-6124/2005/025(01)-0017-06 *Chin. J. Space Sci.* 空间科学学报

ZHAO Zhengyu, WEI Hanying. General dispersion relation for the three-wave process of parametric excitation II. *Chin. J. Space Sci.*, **2005, 25(1): 17—22**

参量激励过程中三波耦合的一般色散关系 (II) *
一般色散关系以及泵场阈值和增长率

赵正予　魏寒颖

(武汉大学电子信息学院　武汉 430079)

摘　要　本文讨论了各向同性的均匀有耗电离层背景下激励参量不稳定性的三波耦合过程. 首先推导有耗情况下参量激励过程中的一般色散关系, 然后针对文献 [1] 得出的两种频率和波矢匹配条件计算激励参量不稳定性所需要的泵波阈值场强和受激励的等离子体波的增长率. 结果表明, 过密加热时泵场阈值与电子碰撞频率和离子碰撞频率的乘积成正比, 不同于以前的一些理论模型得到的泵场阈值与碰撞频率的一次方成正比的结论; 欠密加热比过密加热需要能量更高的高频泵波来激励参量不稳定性.

关键词　参量不稳定性; 色散关系; 阈值; 等离子体波

中图法分类号　P 352

General Dispersion Relation for the Three-Wave Process of Parametric Excitation (II)
The Basic Formula, the Field Threshold and the Growing Rate

ZHAO Zhengyu　WEI Hanying

(*School of Electronic Information, Wuhan University, Wuhan* 430079)

Abstract　Three-wave coupling process in parametric excitation is further studied under an isotropic, homogenous and collisional ionospheric background. A general dispersive equation is firstly derived to describe the excitation of waves for a collisional ionosphere. Then, to start with this dispersive equation as well as the two kinds of wave frequencies and vectors matching conditions obtained in the paper [1], the threshold fields of pump waves to trigger overdense and underdense parametric instabilities and the growing rates of the excited plasma waves are obtained and compared with each other. The results show that in the case of overdense heating the threshold value is proportional to both ion and electron collisional frequency, which is much different from the previous results that the threshold only holds a proportional relation with electron collisional frequency. It is also concluded that more powerful HF waves are required to give rise to parametric instability for underdense heating than overdense heating.

Key words　Parametric instability, Dispersive relation, Threshold value, Plasma wave.

---

* 国家高技术 863 资助项目 (2002AA733101)

2003-10-28 收到原稿,　2004-08-15 收到修定稿

1 引言

在文献 [1] 中讨论了无耗电离层背景下的参量激励过程，从理论上证明了高频泵波加热电离层过程中最容易激励出来的波模是电子 Langmuir 波和离子声波，并得到了被激励的等离子体波满足的两种频率和波矢匹配条件. 此时，泵波的阈值场强最小可以为零. 但是，在有耗电离层背景下，泵波场强必须达到一定的阈值才能激励参量不稳定性. 由于泵场阈值的大小与加热选取的发射功率紧密相关，所以泵场阈值的计算一直以来是人工扰动电离层研究的主要内容之一. 早期的工作有：Nishikawa 从等离子体磁流体方程组出发 [2], Fejer 从能量守恒的角度出发 [3], 和 Gurevich 从 Vlasov 方程出发 [4], 各自推导出泵场阈值的表达式，虽然形式上有细小的差别，但都得到了平方阈值场强和电子碰撞频率成正比的关系. 随后，Guzdar 等采用数值模拟的方法分析和计算了在不均匀体中激励参量不稳定性的泵场阈值，模拟结果表明泵场阈值可以达到 10 V/m 的量级 [5]. 而 Kuo 的工作得到了不同于前人的结论，即平方阈值场强和电子碰撞频率与离子碰撞频率的乘积成正比 [6],[7].

除了泵场阈值，等离子体波的增长率是描述参量激励过程的又一个特征量. DuBois 和 Goldman 利用格林函数法研究了弱外场入射情况下激励等离子体波的增长特性，推导了增长率的表达式 [8]. Lee 和 Su 运用流体描述的方法也得到类似的结果 [9]. 不久，Jackson 从 Vlasov 方程出发确定了激励参量不稳定性满足的一般色散关系并计算了等离子体波的增长率，其结果适用于任意强度、任意波长的泵波加热电离层的情况 [10]. 在弱场扰动的情况下，Jackson 的结论与 DuBois 和 Goldman 的结论是非常一致的. Kuo 则主要对参量衰变不稳定性过程中等离子体波增长特性进行了研究，他建立了关于增长率新的表达形式 [6],[7]. 另外，Alpert 通过数值模拟计算了增长率大小 [11].

本文的工作是在文献 [1] 的工作基础上讨论有耗电离层背景下的参量激励过程. 由于充分考虑了泵波能量衰减 (包括碰撞衰减和朗道衰减)，并在计算过程尽量少作假设以避免舍弃所谓小项的影响，因而本文获得的色散关系更具一般性和完整性. 虽然 Gurevich 和 Jackson 等人也曾经得到激励参量不稳定性的一般色散关系，但都含有很难计算的积分式 [4],[10]. 此外，本文将从一般色散关系出发，针对文献 [1] 得出的两种频率和波矢匹配条件计算泵场阈值和增长率，并将所得结果与前人的结论进行比较.

2 有耗电离层背景下的参量激励过程

下面的工作是在各向同性均匀有耗电离层背景下推导参量激励过程中的一般色散关系.

假设入射泵场的形式为

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{2}\{\boldsymbol{E}_{k_0}\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r}-\omega_0 t)]+\boldsymbol{E}_{-k_0}\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r}+\omega_0 t)]\},$$

出发方程仍然是描述等离子体的磁流体力学方程组和麦克斯韦方程组 [12],[13].

动量方程：

$$m_\alpha n_\alpha\Big(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}_\alpha\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\Big)\boldsymbol{v}_\alpha=e_\alpha n_\alpha\boldsymbol{E}-e_\alpha n_\alpha\nabla\Phi-T_\alpha\nabla n_\alpha\pm m_\alpha n_\alpha\gamma_\alpha(\boldsymbol{v}_\mathrm{e}-\boldsymbol{v}_\mathrm{i}).\tag{1}$$

连续性方程：

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t}+\nabla\cdot(n_\alpha v_\alpha)=0.\tag{2}$$

泊松方程：

$$\nabla^2\Phi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}.\tag{3}$$

其中，α 为 e, i, 分别代表电子和一价正离子；n_α, $m_\alpha, e_\alpha, T_\alpha, v_\alpha, \gamma_\alpha$ 分别表示 α 种粒子的密度，单位质量，单位电荷，温度，宏观速度以及碰撞频率；$\boldsymbol{E}$ 为电场强度，Φ 为等离子体波产生的电势；ε_0 为自由空间介电常数，ρ 为带电粒子总电荷密度.

本文的基本假设和推导思路均与以前在无耗电离层背景下所作的假设思路一致. 即，假设等离子体中主要存在 $(\pm k,\pm\omega)$、$(\pm\Delta k,\pm\Delta\omega)$ 和 $(\pm k_0,\pm\omega_0)$ 三个模式的振荡，其中 $\Delta\omega=\omega-\omega_0$, $\Delta\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0\approx\boldsymbol{k}$; 并用微扰近似的方法将出发方程化简得到 n_k, $n_{\Delta k}$ 所满足的二元方程组，进而由行列式系数为零求得有耗电离层背景下激励参量不稳定性需要满足的一般色散关系.

首先化简与波模式 $(\pm k_0,\pm\omega_0)$ 有关的方程组，得到

$$\boldsymbol{v}_{k_0}=\frac{-e\boldsymbol{E}_{k_0}}{2m_\mathrm{e}(\gamma_\mathrm{e}-\mathrm{i}\omega_0)}.\tag{4}$$

$$\boldsymbol{v}_{-k_0}=\frac{-e\boldsymbol{E}_{k_0}}{2m_{\mathrm{e}}(\gamma_{\mathrm{e}}+\mathrm{i}\omega_0)}. \tag{5}$$

然后分析与模式 $(\pm k,\pm\omega)$ 有关的方程组. 各物理量的 (k,ω) 频率分量满足动量方程:

$$\begin{aligned}&m_{\mathrm{e}}n_0[-\mathrm{i}\omega\boldsymbol{v}_k+\mathrm{i}(\boldsymbol{v}_{k_0}\cdot\Delta\boldsymbol{k})\boldsymbol{v}_{\Delta k}]-\mathrm{i}m_{\mathrm{e}}n_{\Delta k}\omega_0\boldsymbol{v}_{k_0}\\&=-\frac{e\boldsymbol{E}_{k_0}n_{\Delta k}}{2}+en_0(\mathrm{i}\boldsymbol{k})\Phi_k-T_{\mathrm{e}}(\mathrm{i}\boldsymbol{k})n_k-\\&m_{\mathrm{e}}n_0\gamma_{\mathrm{e}}\boldsymbol{v}_k-m_{\mathrm{e}}n_{\Delta k}\gamma_{\mathrm{e}}\boldsymbol{v}_{k_0}.\end{aligned} \tag{6}$$

连续性方程:

$$n_0(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_k)=\omega n_k-(\Delta\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{k_0})n_{\Delta k}. \tag{7}$$

$$n_0(\Delta\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{\Delta k})=\Delta\omega n_{\Delta k}-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{-k_0})n_k. \tag{8}$$

泊松方程:

$$\Phi_k=\frac{-en_k}{\varepsilon_0k^2}. \tag{9}$$

用 $\boldsymbol{k}$ 点乘 (6) 式, 并将泊松方程、连续性方程及 (4)、(5) 式代入，经整理得到

$$\begin{aligned}&(\omega^2-\omega_{\mathrm{pe}}^2-k^2v_{T_{\mathrm{e}}}^2+\Sigma_0^2+\mathrm{i}\gamma_{\mathrm{e}}\omega)n_k\\&=-\Sigma_1[2\Delta\omega\gamma_{\mathrm{e}}+\mathrm{i}(\gamma_{\mathrm{e}}^2+\omega_0\Delta\omega+\omega_0\omega)]n_{\Delta k}.\end{aligned} \tag{10}$$

其中,

$$\omega_{\mathrm{pe}}^2=\frac{n_0e^2}{\varepsilon_0m_{\mathrm{e}}},\qquad v_{T_{\mathrm{e}}}^2=\frac{T_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{e}}},$$

$$\Sigma_0^2=\frac{e^2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_{k_0})^2}{4m_{\mathrm{e}}^2(\omega_0^2+\gamma_{\mathrm{e}}^2)},\quad \Sigma_1=\frac{e(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_{k_0})}{2m_{\mathrm{e}}(\omega_0^2+\gamma_{\mathrm{e}}^2)}.$$

ω_{pe} 是电子的等离子体频率，$v_{T_{\mathrm{e}}}$ 是电子的热速度，Σ_0^2,Σ_1 是中间参量.

最后分析与波模式 $(\pm\Delta k,\pm\Delta\omega)$ 有关的方程组，动量方程，电子:

$$\begin{aligned}&n_{\mathrm{e}}^0\Delta\omega\boldsymbol{v}_{\Delta k}^{\mathrm{e}}-n_0^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{k}\cdot v_{-k_0}^{\mathrm{e}})\boldsymbol{v}_k^{\mathrm{e}}-n_k^{\mathrm{e}}\omega_0\boldsymbol{v}_{-k_0}^{\mathrm{e}}\\&=\frac{e\boldsymbol{E}_{-k_0}n_k^{\mathrm{e}}}{i2m_{\mathrm{e}}}-\frac{en_0^{\mathrm{e}}\Phi_{\Delta k}\Delta\boldsymbol{k}}{m_{\mathrm{e}}}+\\&v_{T_{\mathrm{e}}}^2n_{\Delta k}^{\mathrm{e}}\Delta\boldsymbol{k}-\mathrm{i}\gamma_{\mathrm{e}}n_0^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{v}_{\Delta k}^{\mathrm{e}}-\\&v_{\Delta k}^{\mathrm{i}})-\mathrm{i}\gamma_{\mathrm{e}}n_k^{\mathrm{e}}\boldsymbol{v}_{-k_0}^{\mathrm{e}}.\end{aligned} \tag{11}$$

离子:

$$\begin{aligned}n_0^{\mathrm{i}}\Delta\omega\boldsymbol{v}_{\Delta k}^{\mathrm{i}}=&\frac{en_0^{\mathrm{i}}\Phi_{\Delta k}\Delta\boldsymbol{k}}{m_{\mathrm{i}}}+\\&v_{T_{\mathrm{i}}}^2n_{\Delta k}^{\mathrm{i}}\Delta\boldsymbol{k}+\mathrm{i}\gamma_{\mathrm{i}}n_0^{\mathrm{i}}(v_{\Delta k}^{\mathrm{e}}-v_{\Delta k}^{\mathrm{i}}).\end{aligned} \tag{12}$$

用 $\Delta\boldsymbol{k}$ 点乘 (11), 并将

$$\Phi_{k_0}=\frac{e(n_{\Delta k}^{\mathrm{i}}-n_{\Delta k}^{\mathrm{e}})}{\varepsilon_0(\Delta k)^2},\quad n_{\mathrm{o}}^{\mathrm{i}}(\Delta\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{\Delta k}^{\mathrm{i}})=\Delta\omega n_{\Delta k}^{\mathrm{i}},$$

连续性方程及 (4)、(5) 式代入，经整理得到:

$$\begin{aligned}&\Big[(\Delta\omega)^2-\omega_{\mathrm{pe}}^2-k^2v_{T_{\mathrm{e}}}^2+\Sigma_0^2+\mathrm{i}\gamma_{\mathrm{e}}\omega+\\&\frac{(\mathrm{i}\gamma_{\mathrm{i}}\Delta\omega-\omega_{\mathrm{pi}}^2)(\omega_{\mathrm{pe}}^2-\mathrm{i}\gamma_{\mathrm{e}}\Delta\omega)}{(\Delta\omega)^2-\omega_{\mathrm{pi}}^2-k^2v_{T_{\mathrm{i}}}^2+\mathrm{i}\gamma_{\mathrm{i}}\Delta\omega}\Big]n_{\Delta k}\\&=\Sigma_2\Big[\omega_0-2\omega-\mathrm{i}\gamma_{\mathrm{e}}-\\&\frac{\mathrm{i}\gamma_{\mathrm{e}}(\omega_{\mathrm{pe}}^2-\mathrm{i}\gamma_{\mathrm{e}}\Delta\omega)}{(\Delta\omega)^2-\omega_{\mathrm{pi}}^2-k^2v_{T_{\mathrm{i}}}^2+\mathrm{i}\gamma_{\mathrm{i}}\Delta\omega}\Big]n_k.\end{aligned} \tag{13}$$

其中,

$$\omega_{\mathrm{pi}}^2=\frac{n_0^{\mathrm{i}}e^2}{\varepsilon_0m_{\mathrm{i}}},\quad v_{T_{\mathrm{i}}}^2=\frac{T_{\mathrm{i}}}{m_{\mathrm{i}}},$$

$$c_{\mathrm{s}}^2=\frac{T_{\mathrm{e}}+T_{\mathrm{i}}}{m_{\mathrm{i}}},\quad \Sigma_2=\frac{e(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_{k_0})}{2m_{\mathrm{e}}(\gamma_{\mathrm{e}}+i\omega_0)},$$

ω_{pi} 为离子的等离子体频率，$v_{T_{\mathrm{i}}}$ 为离子的热速度，c_{s} 为离子声速.

利用式 (10) 和 (13) 的系数行列式为零，可以得到在有耗电离层中被激励出来的等离子体波满足的一般色散关系:

$$\begin{aligned}&(\omega^2-\omega_{\mathrm{pe}}^2-k^2v_{T_{\mathrm{e}}}^2+\Sigma_0^2+\mathrm{i}\gamma_{\mathrm{e}}\omega)\Big\{(\Delta\omega)^2-k^2v_{T_{\mathrm{e}}}^2+\\&\Sigma_0^2+\frac{[k^2v_{T_{\mathrm{i}}}^2-(\Delta\omega)^2](\omega_{\mathrm{pe}}^2-\mathrm{i}\gamma_{\mathrm{e}}\Delta\omega)}{(\Delta\omega)^2-\omega_{\mathrm{pi}}^2-k^2v_{T_{\mathrm{i}}}^2+\mathrm{i}\gamma_{\mathrm{i}}\Delta\omega}\Big\}=\\&-\Sigma_0^2[2\Delta\omega\gamma_{\mathrm{e}}+\mathrm{i}(\gamma_{\mathrm{e}}^2+\omega_0\Delta\omega+\omega_0\omega)](\gamma_{\mathrm{e}}-i\omega_0)\cdot\\&\Big[\omega_0-2\omega-\mathrm{i}\gamma_{\mathrm{e}}-\frac{\mathrm{i}\gamma_{\mathrm{e}}(\omega_{\mathrm{pe}}^2-\mathrm{i}\gamma_{\mathrm{e}}\Delta\omega)}{(\Delta\omega)^2-\omega_{\mathrm{pi}}^2-k^2v_{T_{\mathrm{i}}}^2+\mathrm{i}\gamma_{\mathrm{i}}\Delta\omega}\Big]\cdot\\&(\gamma_{\mathrm{e}}^2+\omega_0^2)^{-1}.\end{aligned} \tag{14}$$

由于在计算过程中几乎没有作简化处理，这是一个比较完备的色散关系.

3 泵波的阈值场强和等离子体波的增长率

利用上一节得到的一般色散关系，就可以确定泵波阈值场强和受激等离子体波增长率的表达式.

首先在 (14) 式中假设 ω 是实数，然后将实部、虚部分开，可以得到下面两个形式复杂的方程:

$$
\begin{aligned}
&(\omega^2-\omega_{\rm pe}^2-k^2v_{T_{\rm e}}^2+\Sigma_0^2)\Big\{(\Delta\omega)^2-k^2v_{T_{\rm e}}^2+\Sigma_0^2+\\
&\frac{(\gamma_{\rm e}\gamma_{\rm i}-\omega_{\rm pe}^2)(\Delta\omega)^4+(\omega_{\rm pe}^2\omega_{\rm pi}^2+2k^2v_{T_{\rm i}}^2\omega_{\rm pe}^2-k^2v_{T_{\rm i}}^2\gamma_{\rm e}\gamma_{\rm i})(\Delta\omega)^2-k^2v_{T_{\rm i}}^2\omega_{\rm pe}^2\omega_{\rm pi}^2-k^4v_{T_{\rm i}}^4\omega_{\rm pe}^2}{[(\Delta\omega)^2-\omega_{\rm pi}^2-k^2v_{T_{\rm i}}^2]^2+(\gamma_{\rm i}\Delta\omega)^2}\Big\}-\\
&\gamma_{\rm e}\omega\frac{\gamma_{\rm e}(\Delta\omega)^5+(\gamma_{\rm e}\omega_{\rm pi}^2-\gamma_{\rm i}\omega_{\rm pe}^2)^2(\Delta\omega)^3+(k^2v_{T_{\rm i}}^2\omega_{\rm pi}^2\gamma_{\rm e}+k^4v_{T_{\rm i}}^4\gamma_{\rm e}-k^2v_{T_{\rm i}}^2\omega_{\rm pe}^2\gamma_{\rm i})\Delta\omega}{[(\Delta\omega)^2-\omega_{\rm pi}^2-k^2v_{T_{\rm i}}^2]^2+(\gamma_{\rm i}\Delta\omega)^2}-\\
&\frac{2\Delta\omega\gamma_{\rm e}\Sigma_0^2}{\gamma_{\rm e}^2+\omega_0^2}\Big\{2\gamma_{\rm e}\omega+\frac{(\gamma_{\rm e}\Delta\omega)^3-\omega_{\rm pi}^2\gamma_{\rm e}^3\Delta\omega-k^2v_{T_{\rm i}}^2\gamma_{\rm e}^3\Delta\omega+\omega_{\rm pe}^2\gamma_{\rm e}^3\gamma_{\rm i}\Delta\omega}{[(\Delta\omega)^2-\omega_{\rm pi}^2-k^2v_{T_{\rm i}}^2]^2+(\gamma_{\rm i}\Delta\omega)^2}+\\
&\frac{\omega_{\rm pe}^2\gamma_{\rm e}(\Delta\omega)^3-\omega_{\rm pe}^2\omega_{\rm pi}^2\gamma_{\rm e}\omega_0-k^2v_{T_{\rm i}}^2\omega_{\rm pe}^2\gamma_{\rm e}\omega_0-\gamma_{\rm e}^2\gamma_{\rm i}\omega_0(\Delta\omega)^2}{[(\Delta\omega)^2-\omega_{\rm pi}^2-k^2v_{T_{\rm i}}^2]^2+(\gamma_i\Delta\omega)^2}\Big\}+\frac{(\gamma_{\rm e}^2+\omega_0\Delta\omega+\omega_0\omega)}{\gamma_{\rm e}^2+\omega_0^2}\cdot\\
&\Sigma_0^2\Big\{\omega_0^2+\gamma_{\rm e}^2-2\omega\omega_0-\frac{\omega_0\gamma_{\rm e}^2(\Delta\omega)^3-\omega_0\omega_{\rm pi}^2\gamma_{\rm e}^2\Delta\omega-k^2v_{T_{\rm i}}^2\omega_0\gamma_{\rm e}^2\Delta\omega+\omega_{\rm pe}^2\omega_0\gamma_{\rm e}\gamma_{\rm i}\Delta\omega}{[(\Delta\omega)^2-\omega_{\rm pi}^2-k^2v_{T_{\rm i}}^2]^2+(\gamma_{\rm i}\Delta\omega)^2}-\\
&\frac{\omega_{\rm pe}^2\gamma_{\rm e}^2(\Delta\omega)^2+\omega_{\rm pe}^2\omega_{\rm pi}^2\gamma_{\rm e}^2+\omega_{\rm pe}^2\gamma_{\rm e}^2k^2v_{T_{\rm i}}^2+\gamma_{\rm e}^3\gamma_{\rm i}(\Delta\omega)^2}{[(\Delta\omega)^2-\omega_{\rm pi}^2-k^2v_{T_{\rm i}}^2]^2+(\gamma_{\rm i}\Delta\omega)^2}\Big\}=0.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

$$
\begin{aligned}
&\gamma_{\rm e}\omega\Big\{(\Delta\omega)^2-k^2v_{T_{\rm e}}^2+\Sigma_0^2+\frac{(\gamma_{\rm e}\gamma_{\rm i}-\omega_{\rm pe}^2)(\Delta\omega)^4+(\omega_{\rm pe}^2\omega_{\rm pi}^2+2k^2v_{T_{\rm i}}^2\omega_{\rm pe}^2-k^2v_{T_{\rm i}}^2\gamma_{\rm e}\gamma_{\rm i})(\Delta\omega)^2}{[(\Delta\omega)^2-\omega_{\rm pi}^2-k^2v_{T_{\rm i}}^2]^2+(\gamma_{\rm i}\Delta\omega)^2}+\\
&\frac{-k^2v_{T_{\rm i}}^2\omega_{\rm pe}^2\omega_{\rm pi}^2-k^4v_{T_{\rm i}}^4\omega_{\rm pe}^4}{[(\Delta\omega)^2-\omega_{\rm pi}^2-k^2v_{T_{\rm i}}^2]^2+(\gamma_{\rm i}\Delta\omega)^2}\Big\}+(\omega^2-\omega_{\rm pe}^2-k^2v_{T_{\rm e}}^2+\Sigma_0^2)\cdot\\
&\Big\{\frac{\gamma_{\rm e}(\Delta\omega)^5}{[(\Delta\omega)^2-\omega_{\rm pi}^2-k^2v_{T_{\rm i}}^2]^2+(\gamma_{\rm i}\Delta\omega)^2}+\\
&\frac{(\gamma_{\rm e}\omega_{\rm pi}^2-\gamma_{\rm i}\omega_{\rm pe}^2)(\Delta\omega)^3+(k^2v_{T_{\rm i}}^2\gamma_{\rm e}\omega_{\rm pi}^2+k^4v_{T_{\rm i}}^4\gamma_{\rm e}-k^2v_{T_{\rm i}}^2\gamma_{\rm i}\omega_{\rm pe}^2)\Delta\omega}{[(\Delta\omega)^2-\omega_{\rm pi}^2-k^2v_{T_{\rm i}}^2]^2+(\gamma_{\rm i}\Delta\omega)^2}\Big\}-\frac{2\Delta\omega\gamma_{\rm e}\Sigma_0^2}{\gamma_{\rm e}^2+\omega_0^2}\cdot\\
&\Big\{\omega_0^2+\gamma_{\rm e}^2-2\omega\omega_0-\frac{\omega_0\gamma_{\rm e}^2(\Delta\omega)^3-\omega_0\omega_{\rm pi}^2\gamma_{\rm e}^2\Delta\omega-k^2v_{T_{\rm i}}^2\omega_0\gamma_{\rm e}^2\Delta\omega+\omega_0\omega_{\rm pe}^2\gamma_{\rm e}\gamma_{\rm i}\Delta\omega-\omega_{\rm pe}^2\gamma_{\rm e}^2(\Delta\omega)^2}{[(\Delta\omega)^2-\omega_{\rm pi}^2-k^2v_{T_{\rm i}}^2]^2+(\gamma_{\rm i}\Delta\omega)^2}+\\
&\frac{\omega_{\rm pe}^2\omega_{\rm pi}^2\gamma_{\rm e}^2+\omega_{\rm pe}^2\gamma_{\rm e}^2k^2v_{T_{\rm i}}^2+\gamma_{\rm e}^3\gamma_{\rm i}(\Delta\omega)^2}{[(\Delta\omega)^2-\omega_{\rm pi}^2-k^2v_{T_{\rm i}}^2]^2+(\gamma_{\rm i}\Delta\omega)^2}\Big\}-\frac{\gamma_{\rm e}^2+\omega_0\Delta\omega+\omega_0\omega}{\gamma_{\rm e}^2+\omega_0^2}\Big\{2\gamma_{\rm e}\omega+\\
&\frac{\gamma_{\rm e}^3(\Delta\omega)^3-\omega_{\rm pi}^2\gamma_{\rm e}^3\Delta\omega-k^2v_{T_{\rm i}}^2\gamma_{\rm e}^3\Delta\omega+\omega_{\rm pe}^2\gamma_{\rm e}^3\gamma_{\rm i}\Delta\omega+\omega_{\rm pe}^2\gamma_{\rm e}(\Delta\omega)^3-\omega_{\rm pe}^2\omega_{\rm pi}^2\gamma_{\rm e}\omega_0}{[(\Delta\omega)^2-\omega_{\rm pi}^2-k^2v_{T_{\rm i}}^2]^2+(\gamma_{\rm i}\Delta\omega)^2}+\\
&\frac{-k^2v_{T_{\rm i}}^2\omega_{\rm pe}^2\gamma_{\rm e}\omega_0-\gamma_{\rm e}^2\gamma_{\rm i}\omega_0(\Delta\omega)^2}{[(\Delta\omega)^2-\omega_{\rm pi}^2-k^2v_{T_{\rm i}}^2]^2+(\gamma_i\Delta\omega)^2}\Big\}=0.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

由文献 [1] 的分析可以知道，在 ω 的虚部为零的情况下求得的 Σ_0 可以确定泵波场强的阈值，于是可以通过式 (15) 和 (16) 来计算出激励参量不稳定性的泵场阈值；而将 $\omega=x+{\rm i}y$ 代入式 (14) 并求出 y 值就得到等离子体波的增长率. 由文献 [1] 还可知，在高频泵波加热电离层过程中，最容易被激励出来的波模式满足

$$
{\rm Re}(\omega)=\sqrt{\omega_{\rm pe}^2+k^2v_{T_{\rm e}}^2}=\omega_0\pm kc_{\rm s}.
$$

下面分别讨论这两种情况下的泵场阈值和增长率.

当 ${\rm Re}(\omega)=x=\sqrt{\omega_{\rm pe}^2+k^2v_{T_{\rm e}}^2}=\omega_0-kc_{\rm s}$, ${\rm Re}(\Delta\omega)=-kc_{\rm s}$, 即欠密加热时. 由近似条件 $y\ll\gamma_{\rm e}$, $\gamma_{\rm i}$ 和 $\gamma_{\rm e}$, $\gamma_{\rm i}\ll\omega_{\rm pi}\ll\omega_{\rm pe}$, 舍弃式 (15) 中在量级上可忽略不计的小项，从而求得泵波场强的阈值表达式

$$
E_{0{\rm th}}^2\approx 4\varepsilon_0^{-1}n_{\rm e}(T_{\rm i}+T_{\rm e})\frac{m_{\rm e}(\omega_0^2+\gamma_{\rm e}^2)}{m_{\rm i}(\omega_0-\omega_{\rm pe})^2\cos^2\theta},\tag{17}
$$

其中，θ 为 $\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{E}_{k_0}$ 的夹角. 增长率表达式为

$$y \approx \frac{\left(\frac{m_e}{m_i}\frac{\Sigma^2\gamma_e}{2kc_s x} - \frac{\gamma_e}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{\gamma_e}{2} - \frac{m_e}{m_i}\frac{\Sigma^2\gamma_e}{2kc_s x}\right)^2 - \frac{\Sigma^2 m_e}{m_i kc_s x}(\Sigma^2 - \omega_0 x)}}{2}. \tag{18}$$

当 $\mathrm{Re}(\omega) = \sqrt{\omega_{pe}^2 + k^2 v_{T_e}^2} = \omega_0 + kc_s$, 即过密加热时，通过类似的计算可以得到泵波场强的阈值表达式为

$$E_{0th}^2 \approx 4\varepsilon_0^{-1} n_e (2T_i + T_e)\frac{\mathrm{Re}(\omega)\mathrm{Re}(\Delta\omega)\gamma_e\gamma_i}{\omega_{pi}^2\omega_{pe}^2\cos^2\theta}. \tag{19}$$

增长率表达式为

$$y \approx \frac{-kc_s x\omega_{pi}^2}{\gamma_i(3k^2c_s^2 + k^2 v_{T_i}^2)} + \sqrt{\frac{(kc_s x\omega_{pi}^2)^2}{\gamma_i^2(3k^2c_s^2 + k^2 v_{T_i}^2)^2} + \frac{m_e\omega_{pi}^2\omega_0 x\Sigma^2}{m_i\gamma_e\gamma_i(3k^2c_s^2 + k^2 v_{T_i}^2)}}. \tag{20}$$

4 讨论和结论

下面对本文获得的理论结果作一些讨论和分析.

(1) 首先来大致计算一下泵波阈值的几种表达式所确定的场强大小. 取电离层参数典型值如下:

$$n_e = n_i = 2.0 \times 10^{12}\,\mathrm{m}^{-3},$$
$$T_e = 1500\,\mathrm{K},$$
$$T_i = 1450\,\mathrm{K},$$
$$\gamma_e \approx \gamma_i = 1.1 \times 10^4\,\mathrm{s}^{-1},$$

离子主要是 O^+, 因此 $m_i \approx 2.68 \times 10^{-26}\,\mathrm{kg}$. 还有一些参量的取值如下:

$$m_e = 9.1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg},$$
$$e = 1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C},$$
$$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\cdot m}^{-1},$$
$$\omega_{01} = 7.964\,\mathrm{MHz},$$
$$\omega_{02} = 7.980\,\mathrm{MHz}, \cos^2\theta = 1.$$

于是可以得到:

$$\omega_{pe} \approx 7.972 \times 10^7\,\mathrm{s}^{-1},$$
$$\omega_{pi} \approx 4.645 \times 10^5\,\mathrm{s}^{-1},$$
$$\Delta\omega \approx 80\,\mathrm{kHz}.$$

由式 (17) 来计算欠密加热条件下的泵场阈值, 此时取 ω_{02}, 有

$$E_{0th}^2 \approx 1.243 \times 10^5 (\mathrm{V/m})^2 \Rightarrow E_{0th} \approx 352.55\,\mathrm{V/m}. \tag{21}$$

由式 (19) 来计算过密加热条件下的泵场阈值, 此时取 ω_{01}, 有

$$E_{0th}^2 \approx 3.088 \times 10^{-2} (\mathrm{V/m})^2 \Rightarrow E_{0th} \approx 0.176\,\mathrm{V/m}. \tag{22}$$

明显看出, 欠密加热需要能量更高的高频泵波来激励参量不稳定性. 这是因为欠密加热时, 高频泵波会穿过加热区域传播; 而过密加热时, 高频泵波在加热区域发生反射并把大部分能量储存在电离层中. 并且, 过密加热时比欠密加热时激励参量不稳定性所需的泵波能量更低, 这一结论与国外的一些加热实验所得结论是相同的. 从数值上看, 过密加热的阈值大小和许多前人的理论结果以及实验观测值在同一量级上 [14],[15]; 而且由式 (19) 看出平方阈值场强是和电子碰撞频率与离子碰撞频率的乘积成正比的, 该结论与 Kuo 得到的关于泵场阈值的结论一致, 却不同于 Nishikawa, Fejer, Gurevich 等人得到的泵场阈值与碰撞频率的一次方成正比的结论.

(2) 由于激励参量不稳定性的区域一般是 F 层, 因而只需考虑电子和离子的碰撞 γ_{ei}. 但是, 在这个过程中波粒共振引起电波能量的朗道衰减 (非碰撞衰减) 是较大的. 考虑了朗道衰减的影响后, γ_e 和 γ_i 都会发生很大的变化, 这时应取以下形式 [2]:

$$\gamma_e = \gamma_{ei} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega_{pe}}{k^3 D_e^3}\exp\left(-\frac{1}{k^2 D_e^2}\right),$$

其中,

$$D_e^2 = \frac{\varepsilon_0 T_e}{n_e e^2}. \tag{23}$$

$$\gamma_i = \gamma_{ie} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{kD_e}\frac{x^2}{D_e}, \quad x = \mathrm{Re}\omega. \tag{24}$$

(3) 本文讨论的阈值和增长率都是针对两种最容易激励参量不稳定性的情况而言的, 即激励的等离子体波均为电离层中的本征模式. 但实际情况并不一定是完全谐振的, 被激励的两个等离子体波的频率不一定恰好落在 Langmuir 波和离子声波的频

率上. 对于有轻微失谐的情况, 阈值会提高, 增长率的形式也会不同.

最后总结本文所做的工作和得到的结论如下.

(1) 推导出三波耦合过程中激励参量不稳定性满足的一般色散关系并由此得到泵波阈值和等离子体波增长率的表达式.

(2) 在满足过密加热的频率条件下, 激励参量不稳定性所需的泵场阈值与电子碰撞频率和离子碰撞频率的乘积成正比.

(3) 欠密加热比过密加热需要能量更高的高频泵波来激励参量不稳定性.

参考文献

[1] Zhao Zhengyu, Wei Hanyingin. General dispersion relation for the three-wave process of parametric excitation (I), The preferred excitation of an electron langmuir wave and an ion acoustic wave. *Chin. Space Sci.*, **24**(6):441—447. in Chinese (赵正予, 魏寒颖. 参量激励过程中三波耦合的一般色散关系 (I), 最容易激励参量不稳定性的频率和波矢条件. 空间科学学报, **24**(6):441—447)

[2] Nishikawa K. Parametric excitation of coupled waves II. parametric plasmon photon interaction. *J. Phys. Soc. Japan*, 1968, **24b**(5):1152—1158

[3] Fejer J A, Leer E. Purely Growing Parametric Instability in an Inhomogeneous Plasma. *J. Geophys. Res.*, 1972, **77**(4):700—708

[4] Gurevich A V. Nonlinear Phenomena in the Ionosphere. New York: Springer-Verlag, 1978. 358—392

[5] Guzdar P N, Chaturvedi P K, Papadopoulos K *et al.* The self-focusing instability in the presence of density irregularities in the ionosphere. *J. Geophys. Res.*, 1996, **101**(A2):2453—2460

[6] Kuo S P. The role of nonlinear beating currents on parametric instabilities in magneto-plasmas. *Phys. Plasmas*, 1996, **3**:3957

[7] Kuo S P. Cascade of the parametric decay instability in ionospheric heating experiments. *J. Geophys. Res.*, 2001, **106**(A4):5593—5597

[8] DuBios D F, Goldman M V. Radiation-induced instability of electron plasma oscillations. *Phys. Rev. Lett.*, 1965, **14**(14):544—546

[9] Lee Y C, Su C H. Theory of parametric coupling in plasmas. *Phys. Rev.*, 1966, **152**(1):129—135

[10] Jackson E A. Parametric effects of radiation on a plasma. *Phys. Rev.*, 1967, **153**(1):235—244

[11] Alpert Y L. Longitudinal ELF to LF electromagnetic oscillations and waves generated in the ionosphere under the influence of strong high-frequency electric field. *J. Geophys. Res.*, 1995, **100**(A1):289—304

[12] Tengcai Ma *et al.* The Theory of Plasma Physics. Hefei: University of Science and Technology of China Press, 1998. 231—237. in Chinese (马腾才等. 等离子体物理原理. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1998. 231—237)

[13] Lei Hanyuan *et al.* Dynamics of Plasma. Wuhan: Wuhan University Press, 1990. 88—95. in Chinese (雷源汉等. 等离子体动力学. 武汉: 武汉大学出版社, 1990. 88—95)

[14] Kuo S P, Cheo B R, Lee M C. The role of parametric decay instabilities in generating ionospheric irregularities. *J. Geophys. Res.*, 1983, **88**(1):417—422

[15] Frolov V L, Erukhimov L M, Metelev S A *et al.* Temporal behavior of artificial small-scale ionospheric irregularities: Review of experimental results. *J. Atmos. Solar-Terr. Phys.*, 1997, **59**(18):2317—2333