文章编号:0494-0911(2010)01-0021-03　　**中图分类号**:P207.2　　**文献标识码**:B

基于有色噪声的序贯平差

赵长胜

(徐州师范大学 测绘学院,江苏 徐州 221116)

Sequential Adjustment Based on Colored Noise

ZHAO Changsheng

摘要:推导基于有色噪声的观测量序贯最小二乘平差及其精度估计,并证明这种方法与整体平差和静态滤波具有相同的平差结果。通过算例表明,推导的公式正确有效和实用。

关键词:序贯平差;有色噪声;滤波

经典序贯平差理论是建立在不同组的观测值之间误差独立的基础上的,而现实数据处理中出现了不同组间的观测量相关问题。这就是具有相关观测量的序贯平差问题,也是静态滤波问题。文献[1]采用观测量求差的方法解决了具有相关观测量的序贯平差问题。本文在此基础上进一步讨论这个问题。

设观测向量 $\boldsymbol{L}$ 分为两组 $\boldsymbol{L}_1$、$\boldsymbol{L}_2$,其观测方程为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{L}_1&=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{X}+\Delta_1\\ \boldsymbol{L}_2&=\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{X}+\Delta_2\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

在第一组平差之前 $\boldsymbol{X}$ 为非随机向量,Δ_1、Δ_2 为随机噪声向量,其协因数矩阵为

$$\boldsymbol{Q}_{\Delta\Delta}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_{11}&\boldsymbol{Q}_{12}\\ \boldsymbol{Q}_{21}&\boldsymbol{Q}_{22}\end{bmatrix}\tag{2}$$

因为 Δ_1、Δ_2 的协方差阵 $\boldsymbol{Q}_{12}$ 不为零,因此观测噪声为有色噪声,或者称 Δ_1、Δ_2 误差相关,两组观测量 $\boldsymbol{L}_1$、$\boldsymbol{L}_2$ 为相关观测量。

一、等价变换

将式(1)中第一式左乘 $-\boldsymbol{Q}_{21}\boldsymbol{Q}_{11}^{-1}$ 加到第二式中,并令

$$\left.\begin{aligned}\widetilde{\boldsymbol{B}}_2&=\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{Q}_{21}\boldsymbol{Q}_{11}^{-1}\boldsymbol{B}_1\\ \widetilde{\boldsymbol{L}}_2&=\boldsymbol{L}_2-\boldsymbol{Q}_{21}\boldsymbol{Q}_{11}^{-1}\boldsymbol{L}_1\\ \widetilde{\Delta}_2&=\Delta_2-\boldsymbol{Q}_{21}\boldsymbol{Q}_{11}^{-1}\Delta_1\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

则式(1)变换为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{L}_1&=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{X}+\Delta_1\\ \widetilde{\boldsymbol{L}}_2&=\widetilde{\boldsymbol{B}}_2\boldsymbol{X}+\widetilde{\Delta}_2\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

变换后 $\boldsymbol{L}_1$,$\widetilde{\boldsymbol{L}}_2$ 的互协因数矩阵为

$$\widetilde{\boldsymbol{Q}}_{12}=[\boldsymbol{I}\quad 0]\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_{11}&\boldsymbol{Q}_{12}\\ \boldsymbol{Q}_{21}&\boldsymbol{Q}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\boldsymbol{Q}_{11}^{-1}\boldsymbol{Q}_{12}\\ \boldsymbol{I}\end{bmatrix}=0\tag{5}$$

$\widetilde{\boldsymbol{L}}_2$ 的协因数矩阵为

$$\widetilde{\boldsymbol{Q}}_{22}=[-\boldsymbol{Q}_{21}\boldsymbol{Q}_{11}^{-1}\quad \boldsymbol{I}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_{11}&\boldsymbol{Q}_{12}\\ \boldsymbol{Q}_{21}&\boldsymbol{Q}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\boldsymbol{Q}_{11}^{-1}\boldsymbol{Q}_{12}\\ \boldsymbol{I}\end{bmatrix}=$$

$$\boldsymbol{Q}_{22}-\boldsymbol{Q}_{21}\boldsymbol{Q}_{11}^{-1}\boldsymbol{Q}_{12}\tag{6}$$

因此,变换后 $\boldsymbol{L}_1$、$\widetilde{\boldsymbol{L}}_2$ 是互相独立的。

单独对第一组观测值进行平差,其平差结果为

$$\overline{\boldsymbol{X}}=(\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{11}^{-1}\boldsymbol{B}_1)^{-1}(\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{11}^{-1}\boldsymbol{L}_1)=\boldsymbol{Q}_{\overline{X}}\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{11}^{-1}\boldsymbol{L}_1\tag{7}$$

若按序贯平差方法进行平差,第二次平差时的误差方程应为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{V}_x&=\hat{\boldsymbol{X}}-\overline{\boldsymbol{X}}\\ \widetilde{\boldsymbol{V}}_2&=\widetilde{\boldsymbol{B}}_2\hat{\boldsymbol{X}}-\widetilde{\boldsymbol{L}}_2\end{aligned}\right\}\quad \text{权阵 } \boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_{\overline{X}}^{-1}&\\ &\widetilde{\boldsymbol{Q}}_{22}^{-1}\end{bmatrix}\tag{8}$$

组成法方程并解算,第二次平差成果为

$$\hat{\boldsymbol{X}}=(\widetilde{\boldsymbol{B}}_2^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{Q}}_{22}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{B}}_2+\boldsymbol{Q}_{\overline{X}}^{-1})^{-1}(\widetilde{\boldsymbol{B}}_2^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{Q}}_{22}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{L}}_2+\boldsymbol{Q}_{\overline{X}}^{-1}\overline{\boldsymbol{X}})=$$

$$\boldsymbol{Q}_{\hat{X}}^{-1}(\widetilde{\boldsymbol{B}}_2^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{Q}}_{22}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{L}}_2+\boldsymbol{Q}_{\overline{X}}^{-1}\overline{\boldsymbol{X}})\tag{9}$$

二、静态滤波

用静态滤波理论来完成第二次平差时,$\boldsymbol{X}$ 是随机向量,称为滤波参数,其先验期望分别为 $\boldsymbol{\mu}_X=E(\boldsymbol{X})=\overline{\boldsymbol{X}}$,$\widetilde{\boldsymbol{L}}_2$ 的协因数和 $\boldsymbol{X}$ 关于 $\widetilde{\boldsymbol{L}}_2$ 的互协因数分别为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{Q}_{\widetilde{L}_2\widetilde{L}_2}&=\widetilde{\boldsymbol{B}}_2\boldsymbol{Q}_{\overline{X}}\widetilde{\boldsymbol{B}}_2^{\mathrm{T}}+\widetilde{\boldsymbol{Q}}_{22}\\ \boldsymbol{Q}_{\overline{X}\widetilde{L}_2}&=\boldsymbol{Q}_{\overline{X}}\widetilde{\boldsymbol{B}}_2^{\mathrm{T}}\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

$\widetilde{\boldsymbol{L}}_2$ 的先验数学期望为

$$\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}_2}=E(\widetilde{\boldsymbol{L}}_2)=\widetilde{\boldsymbol{B}}_2\overline{\boldsymbol{X}}\tag{11}$$

根据静态滤波求估值的公式为

$$\hat{\boldsymbol{X}}=\overline{\boldsymbol{X}}+\boldsymbol{Q}_{\overline{X}}\widetilde{\boldsymbol{B}}_2^{\mathrm{T}}(\widetilde{\boldsymbol{B}}_2\boldsymbol{Q}_{\overline{X}}\widetilde{\boldsymbol{B}}_2^{\mathrm{T}}+\widetilde{\boldsymbol{Q}}_{22})^{-1}(\widetilde{\boldsymbol{L}}_2-\widetilde{\boldsymbol{B}}_2\overline{\boldsymbol{X}})\tag{12}$$

收稿日期:2009-03-12

作者简介:赵长胜(1957-),男,辽宁阜新人,博士,教授,主要从事大地测量和数据处理方面的教学科研工作。

其估值的方差公式为

$$Q_{\hat{X}} = Q_{\bar{X}} - Q_{\bar{X}}\tilde{B}_2^{\mathrm{T}}(\tilde{B}_2 Q_{\bar{X}}\tilde{B}_2^{\mathrm{T}} + \tilde{Q}_{22})^{-1}\tilde{B}_2 Q_{\bar{X}} \tag{13}$$

将式(3)代入到式(9)、式(10),得

$$\left.\begin{aligned}
\hat{X} &= \bar{X} + (Q_{\bar{X}}B_2^{\mathrm{T}} + Q_{\bar{X}\Delta_2})(B_{22}Q_{\bar{X}}B_{22}^{\mathrm{T}} + B_{22}Q_{\bar{X}\Delta_2} + \\
&\quad Q_{\Delta_2\bar{X}}B_{22}^{\mathrm{T}} + \bar{Q}_{22})^{-1}(\bar{L}_2 - B_2\bar{X}) \\
Q_{\hat{X}} &= Q_{\bar{X}} - (Q_{\bar{X}}B_2^{\mathrm{T}} + Q_{\bar{X}\Delta_2})(B_{22}Q_{\bar{X}}B_{22}^{\mathrm{T}} + B_{22}Q_{\bar{X}\Delta_2} + \\
&\quad Q_{\Delta_2\bar{X}}B_{22}^{\mathrm{T}} + \bar{Q}_{22})^{-1}(B_{22}Q_{\bar{X}} + Q_{\Delta_2\bar{X}})
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
Q_{\bar{X}\Delta_2} &= -Q_{\bar{X}}B_1^{\mathrm{T}}Q_{11}^{-1}Q_{12} \\
\bar{Q}_{22} &= Q_{22} - Q_{21}Q_{11}^{-1}Q_{V_1V_1}Q_{11}^{-1}Q_{12} \\
\bar{L}_2 &= L_2 - Q_{21}Q_{11}^{-1}V_1
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

三、算 例

设某平差问题的数学模型为

$$V = \begin{bmatrix}
-5.61 & 0.18 & 0.00 & 0.00 \\
2.46 & 1.32 & 0.00 & 0.00 \\
3.15 & -1.50 & 0.00 & 0.00 \\
0.00 & 0.00 & -3.53 & 4.77 \\
0.00 & 0.00 & 0.33 & -3.47 \\
0.00 & 0.00 & 3.20 & -1.30 \\
0.00 & 0.00 & -2.45 & -1.30 \\
0.00 & 0.00 & 5.65 & 0.00 \\
0.00 & 0.00 & -3.20 & 1.30 \\
2.62 & -0.89 & -2.29 & -2.58 \\
-2.46 & -1.32 & -0.33 & 3.47 \\
-0.16 & 2.21 & 2.62 & -0.89 \\
-2.62 & 0.89 & 0.17 & -2.19 \\
2.32 & 2.60 & -2.60 & 0.89 \\
0.29 & -3.49 & 2.45 & 1.30 \\
-0.29 & 3.49 & 0.00 & 0.00 \\
3.44 & -4.99 & 0.00 & 0.00 \\
-0.15 & 1.50 & 0.00 & 0.00
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{X}_2 \\ \hat{X}_3 \\ \hat{X}_4 \end{bmatrix}
- \begin{bmatrix}
-0.20 \\ -0.60 \\ 3.10 \\ -0.90 \\ -0.50 \\ 2.60 \\ -3.10 \\ 8.50 \\ -1.90 \\ -1.20 \\ 2.90 \\ -3.30 \\ -4.00 \\ -8.50 \\ 13.20 \\ -9.60 \\ 10.70 \\ -3.10
\end{bmatrix}$$

$$Q_{\Delta\Delta} = \begin{bmatrix}
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2
\end{bmatrix}$$

1) 整体平差结果:$\hat{X}=[0.015 \quad 2.398 \quad -1.188 \quad -0.481]^{T}$。

2) 顾及有色噪声的等价变换法序贯平差。

为了验证有色噪声的序贯平差,将前10个观测值为第一组,后8个观测值为第2组。第一组单独平差结果:$\bar{X}=[-0.181 \quad 1.495 \quad -1.139 \quad -0.428]^{T}$。

由于两组观测值相关,其互协因数矩阵 $Q_{21}\neq 0$。因此需要按式(3)对第2组观测方程和协因数矩阵进行改化,改化后第2组观测方程和协因数矩阵为

$$\tilde{V}_2=\begin{bmatrix} -1.23 & -0.66 & -0.17 & 1.74 \\ 2.65 & 2.12 & 2.62 & -0.89 \\ -1.31 & 0.45 & 1.85 & -3.48 \\ 2.32 & 2.60 & -2.60 & 0.89 \\ 0.29 & -3.49 & 1.23 & 0.65 \\ -0.29 & 3.49 & 0.00 & 0.00 \\ 0.64 & -4.90 & 0.00 & 0.00 \\ -1.58 & 0.75 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{X}_2 \\ \hat{X}_3 \\ \hat{X}_4 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2.35 \\ -3.20 \\ -0.35 \\ -8.50 \\ 11.65 \\ -9.60 \\ 10.60 \\ -1.55 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{Q}_{22}=\begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.5 & 0.0 & -1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.5 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -1.0 & 0.0 & 2.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.5 & -1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 & 2.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.5 & 0.0 & -1.0 & 0.0 & 0.0 & 1.5 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.5 \end{bmatrix}$$

第二次平差时将 $\bar{X}$、$\tilde{L}_2$ 作为观测值,其权阵分别为 $P_{\bar{X}}=Q_{\bar{X}}^{-1}$,$\tilde{P}_2=\tilde{Q}_{22}^{-1}$,组成法方程并解算,其成果为

$$\hat{X}=[-0.015 \quad -2.398 \quad 1.188 \quad 0.481]^{T}$$

通过比较整体平差和等价变换法序贯平差结果可知,等价变换法序贯平差结果是正确的。

3) 不考虑有色噪声的经典序贯平差。

如果不考虑两组观测量相关,按经典序贯平差方法,第二次平差时将 $\bar{X}$、L_2 作为观测值,其权阵分别为 $P_{\bar{X}}=Q_{\bar{X}}^{-1}$,$P_2=Q_{22}^{-1}$,组成法方程并解算,其成果为

$$\hat{X}'=[0.029 \quad -2.349 \quad 1.183 \quad 0.451]^{T}$$

在有色噪声的作用下,用经典序贯平差,平差结果参数与等价变换法之间存在的误差为

$$\|\hat{X}-\hat{X}'\|=[0.044 \quad 0.049 \quad 0.005 \quad 0.030]^{T}$$

四、结束语

有色噪声的序贯平差采用等价变换法处理,其结果与整体平差相同。如果不考虑有色噪声的作用,其平差结果要带有一定的误差,其误差大小与观测精度、网型结构和相关度有关。

参考文献:

[1] 赵长胜. 相关观测值的逐次间接平差[J]. 测绘工程,1997,6(2):17-21.

[2] 杨元喜. 自适应动态导航定位[M]. 北京:测绘出版社,2006.

[3] 何海波,杨元喜. 序贯平差抗差估计[J]. 测绘工程,1998,7(1):36-40.