共同均值参数线性估计的可容许性

王志忠　张根明†

(中南工业大学应用数学与应用软件系,长沙,410083)

摘 要 讨论了增长曲线模型共同均值的线性估计的可容许性,给出了共同均值的线性可估函数的线性估计在 6 种不同的优良准则下的可容许的充分必要条件.

关键词 统计模型; 平均值; 容许性

中图法分类号 O212.4

1 定义与符号

本文考虑增长曲线模型

$$\begin{cases} \underset{p\times n}{X_i} = \underset{q\times k}{A}BC + \varepsilon_i \\ E(\boldsymbol{\varepsilon}_i) = 0 \\ \mathrm{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}_i) = \sigma_i^2 U \otimes V \\ \mathrm{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_j) = 0 \qquad i,j = 1,2,\cdots,m \text{ 且 } i \neq j \end{cases} \tag{1}$$

其中 $U \geqslant 0, V \geqslant 0, A, C$ 均为已知矩阵;B 和 $\sigma_i^2 (i=1,2,\cdots,m)$ 是未知参数,$\boldsymbol{\varepsilon}$ 是矩阵 ε 按列拉直而成的向量,$U \otimes V$ 表示 U 和 V 的 Kronecker 积.

对上述模型(1),当 $C=I_n, U=I_n, V>0$ 时,陈清平[1]给出了 5 种不同形式的准则下可容许的充分必要条件. 本文讨论一般情况,解决了文献[1]提出的将 $U>0, V>0$ 推广到 $U \geqslant 0, V \geqslant 0$ 的问题. 文献[1]的所有结果都是本文的特例.

如果 $K_{t\times q}$ 和 $L_{k\times l}$ 满足 $\mathscr{U}(K') \subseteq \mathscr{U}(A')$ 和 $\mathscr{U}(L) \subseteq \mathscr{U}(C)$,那么称线性函数 KBL 是可估的. 此处 $\mathscr{U}(L)$ 表示 L 张成的列空间.

设 d 是 KBL 的估计,本文考虑如下风险函数

$$R(d, KBL, \sigma_1^2, \cdots, \sigma_m^2) = E(d - KBL)(d - KBL)' \tag{2}$$

在估计类 $\mathscr{L}$ 中,$d \in \mathscr{L}$ 是 KBL 的 k-可容许($k=1,\cdots,6$),并记为 $d \underset{k}{\overset{\mathscr{L}}{\sim}} KBL$,如果在 $\mathscr{L}$ 中不存在 d_1 k-优于 d. 其中 d_1 k-优于 d 的定义为:

(1) $\mathrm{tr}[R(d_1, KBL, \sigma_1^2, \cdots, \sigma_m^2)] \leqslant \mathrm{tr}[R(d, KBL, \sigma_1^2, \cdots, \sigma_m^2)]$ 且存在 $(B_0, \sigma_{10}^2, \cdots, \sigma_{m0}^2)$ 使严格不等号成立.

(2) $\lambda_1[R(d_1, KBL, \sigma_1^2, \cdots, \sigma_m^2)] \leqslant \lambda_1[R(d, KBL, \sigma_1^2, \cdots, \sigma_m^2)]$ 且存在 $(B_0, \sigma_{10}^2, \cdots, \sigma_{m0}^2)$ 使严格不等号成立,其中 $\lambda_1(A)$ 表示 A 的最大特征根.

收稿日期 1995-07-20　第 1 作者 王志忠,男,32 岁,副教授

† 中南工业大学经济贸易系

(3) $R(d_1,KBL,\sigma_1^2,\cdots,\sigma_m^2)\leqslant R(d,KBL,\sigma_1^2,\cdots,\sigma_m^2)$且存在$(B_0,\sigma_{10}^2,\cdots,\sigma_{m0}^2)$使

$$R(d_1,KBL,\sigma_1^2,\cdots,\sigma_m^2)-R(d,KBL,\sigma_1^2,\cdots,\sigma_m^2)\neq 0$$

(4) $\lambda_i[R(d_1,KBL,\sigma_1^2,\cdots,\sigma_m^2)]\leqslant\lambda_i[R(d,KBL,\sigma_1^2,\cdots,\sigma_m^2)]$且存在$(B_0,\sigma_{10}^2,\cdots,\sigma_{m0}^2)$和 i_0 使严格不等号成立. 其中，$\lambda_i(A)$表示 A 的第 i 个顺序特征根.

(5) $\prod\limits_{i=1}^{k}\lambda_i[R(d_1,KBL,\sigma_1^2,\cdots,\sigma_m^2)]\leqslant\prod\limits_{i=1}^{k}\lambda_i[R(d,KBL,\sigma_1^2,\cdots,\sigma_m^2)]$且存在$(B_0,\sigma_{10}^2,\cdots,\sigma_{m0}^2)$和 k_0 使严格不等号成立，$1\leqslant k\leqslant t$.

(6) $\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i[R(d_1,KBL,\sigma_1^2,\cdots,\sigma_m^2)]\leqslant\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i[R(d,KBL,\sigma_1^2,\cdots,\sigma_m^2)]$且存在$(B_0,\sigma_{10}^2,\cdots,\sigma_{m0}^2)$使严格不等号成立.

估计类为

$$\mathscr{L}=\left\{\sum_{i=1}^{m}D_iX_iF_i,D_iA=K,D_i\text{ 为 }t\times p\text{ 阵},F_i\text{ 为 }n\times l\text{ 阵},i=1,\cdots,m\right\}$$

$$\mathscr{L}_1=\left\{\sum_{i=1}^{m}D_iX_iF_i,\sum_{i=1}^{m}D_iX_iF_i\in\mathscr{L},D_iV\neq 0,i=1,\cdots,m\right\}$$

$$\mathscr{L}_2=\left\{\sum_{i=1}^{m}D_iX_iF_i+M,\sum_{i=1}^{m}D_iX_iF_i\in\mathscr{L}_1,M\text{ 为 }t\times l\text{ 阵}\right\}$$

2 $\mathscr{L}_1$ 中的可容许估计

引理 1 对一切$(B,\sigma_1^2,\cdots,\sigma_m^2)$有

(1) $$R(\sum_{i=1}^{m}D_iX_iF_i,KBL,\sigma_1^2,\cdots,\sigma_m^2)\geqslant R(\sum_{i=1}^{m}D_iA\hat{X}_iCF_i,KBL,\sigma_1^2,\cdots,\sigma_m^2)\tag{3}$$

且(3)等号成立的充要条件为对任意 $i(i=1,2,\cdots,m)$满足下列条件之一：(i)$UF_i\neq 0,D_iV=0$；(ii) $UF_i=0,D_iV\neq 0$；(iii) $UF_i=0,D_iV=0$ 时，则 $D_iP_AV=0,UP_CF_i=0$ 有一个成立；(iv) $UF_i\neq 0,D_iV\neq 0$

$$D_iV=D_iA(A'T_1^+A)^-A'T_1^+V\tag{4}$$

$$F_i'U=F'_iC(C'T_2^+C)^-C'T_2^+U\tag{5}$$

此处

$$D_iA\hat{X}_iCF_i=D_iA(A'T_1^+A)^-A'T_1^+X_iT_2^+C'(CT_2^+C')^-CF_i$$

$$T_1=V+AA',T_2=U+C'C$$

(2) $$R(\sum_{i=1}^{m}D_iX_iF_i,KBL,\sigma_1^2,\cdots,\sigma_m^2)=\sum_{i=1}^{m}\sigma_i^2\mathrm{tr}(F_i'UF_i)D_iVD_i'+$$
$$(\sum_{i=1}^{m}D_iABCF_i-KBL)(\sum_{i=1}^{m}D_iABCF_i-KBL)'$$

$$R(\sum_{i=1}^{m}D_iA\hat{X}_iCF_i,KBL,\sigma_1^2,\cdots,\sigma_m^2)=(\sum_{i=1}^{m}D_iABCF_i-KBL)(\sum_{i=1}^{m}D_iABCF_i-KBL)'+$$
$$\sum_{i=1}^{m}\sigma_i^2\mathrm{tr}(F_i'P_C'UP_CF_i)D_iP_AVP'_AD_i'$$

此处

$$P_A = A(A'T_1^+A)^- A'T_1^+, P_C = T_2^+C'(CT_2^+C')^- C$$

(3) 若 $\sum_{i=1}^{m} D_iX_iF_i + M \in \mathscr{L}_2$，$K$ 为列满秩，则有

$$R(\sum_{i=1}^{m} D_iX_iF_i + M, KBL, \sigma_1^2, \cdots, \sigma_m^2) =$$

$$R(\sum_{i=1}^{m} D_i(X_i + AM_0C)F_i, K(B + M_0)L, \sigma_1^2, \cdots, \sigma_m^2) +$$

$$M(I - P_{(\sum_{i=1}^{m} CF_i - L)'})M'$$

M_0 满足

$$MP_{(\sum_{i=1}^{m} CF_i - L)'} = KM_0(\sum_{i=1}^{m} CF_i - L)$$

证略.

引理 2 将引理 1 的 $R(N)$ 改为 $\Phi_i[R(N)]$($i=1,\cdots,6$)，引理 1 的所有结果仍然成立. 其中

$$\Phi_1[R(N)] = \mathrm{tr}R(N),\ \Phi_2[R(N)] = \lambda_1[R(N)],\ \Phi_3[R(N)] = R(N),$$

$$\Phi_4[R(N)] = \lambda_i[R(N)],\ \Phi_5[R(N)] = \prod_{i=1}^{k} \lambda_i[R(N)],\ \Phi_6[R(N)] = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i[R(N)]$$

证略.

考虑线性模型

$$\begin{cases} Y_i = C'\beta + e_i \\ E(Y_i) = C'\beta \\ \mathrm{Var}(Y_i) = \sigma_i^2 U \\ \mathrm{Var}(Y_i, Y_j) = 0,\ i \neq j,\ i, j = 1, \cdots, m \end{cases} \tag{6}$$

和二次损失

$$(d - L'\beta)'(d - L'\beta) \tag{7}$$

其中 C, U, L 分别为模型(1)和(2)的 C, U, L；$\beta \in R^k$ 和 σ_i^2($i=1,\cdots,m$)为未知参数.

引理 3 在模型(6)及(7)下，若 $L'\beta$ 可估，则 $\sum_{i=1}^{m} F'_iY_i$ 是 $L'\beta$ 在齐次线性估计类中可容许估计的充分必要条件是：

(1) $F'_1U = k_1F'U, \cdots, F'_mU = k_mF'U,\ k_1, \cdots, k_m \geqslant 0, \sum_{i=1}^{m} k_i = 1, F = \sum_{i=1}^{m} F_i$

(2) $F'U = F'C'(CT_2^+C')^- CT_2^+U$

(3) $F'C'GCF \leqslant L'G'CF$

(4) $\mathscr{U}(F'C' - L') = \mathscr{U}[(F'C' - L')GL']$，其中，$G = (CT_2^+C')^- CT_2^+UT_2^+C'(CT_2^+C')^-$

证略.

定理 1 在模型(1)和(2)下，若 KBL 可估，且(4)，(5)成立，则 $\sum_{i=1}^{m} D_iX_iF_i \overset{\mathscr{L}_1}{\underset{k}{\sim}} KBL$ 充分必

要条件是在模型(6)和(7)下齐次线性估计类中$\sum_{i=1}^{m} F_i'Y_i \sim L'\beta$. 其中，$k=1,2,\cdots,6$.

证　明　只证明 $k=3$ 时成立，其它情况类似可证.

必要性　若在模型(6)，(7)下，存在 $L'\beta$ 的估计$\sum_{i=1}^{m} B_i'Y_i$ 优于$\sum_{i=1}^{m} F_i'Y_i$，则有

$$\mathrm{tr}B_i'UB_i \leqslant \mathrm{tr}F_i'UF_i,\ i=1,\cdots,m \tag{8}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m} B_i'C' - L'\right)'\left(\sum_{i=1}^{m} B_i'C' - L'\right) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{m} F_i'C' - L'\right)'\left(\sum_{i=1}^{m} F_i'C' - L'\right) \tag{9}$$

且当(8)式的等号都成立时

$$\left(\sum_{i=1}^{m} B_i'C' - L'\right)'\left(\sum_{i=1}^{m} B_i'C' - L'\right) = \left(\sum_{i=1}^{m} F_i'C' - L'\right)'\left(\sum_{i=1}^{m} F_i'C' - L'\right) \tag{10}$$

故可得

$$R\left(\sum_{i=1}^{m} N_iA\hat{B}CB_i, KBL, \sigma_1^2,\cdots,\sigma_m^2\right) \leqslant R\left(\sum_{i=1}^{m} D_iX_iF_i, KBL, \sigma_1^2,\cdots,\sigma_m^2\right) \tag{11}$$

由(8)，(9)，(10)式知存在$(B_0,\sigma_{10}^2,\cdots,\sigma_{m0}^2)$使(11)式等号不成立.

因此，$\sum_{i=1}^{m} N_iA\hat{B}CB_i$ 优于$\sum_{i=1}^{m} D_iX_iF_i$，这与$\sum_{i=1}^{m} D_iX_iF_i \overset{\mathscr{L}_1}{\underset{3}{\sim}} KBL$ 矛盾. 故必要性得证.

充分性　若存在$\sum_{i=1}^{m} N_iX_iB_i \in \mathscr{L}_1$ 优于$\sum_{i=1}^{m} D_iX_iF_i$，则对一切$(B,\sigma_1^2,\cdots,\sigma_m^2)$有

$$R\left(\sum_{i=1}^{m} N_iX_iB_i, KBL, \sigma_1^2,\cdots,\sigma_m^2\right) \leqslant R\left(\sum_{i=1}^{m} D_iX_iF_i, KBL, \sigma_1^2,\cdots,\sigma_m^2\right) \tag{12}$$

且存在$(B_0,\sigma_{10}^2,\cdots,\sigma_{m0}^2)$使等号不成立.

由(12)式，可以推得

$$\mathrm{tr}B_i'UB_i \leqslant \mathrm{tr}F_i'UF_i,\ i=1,\cdots,m \tag{13}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m} CB_i - L\right)\left(\sum_{i=1}^{m} CB_i - L\right)' \leqslant \left(\sum_{i=1}^{m} CF_i - L\right)\left(\sum_{i=1}^{m} CF_i - L\right)' \tag{14}$$

且至少有一个等号不成立. 因此，在模型(6)和(7)下，$\sum_{i=1}^{m} B_i'Y_i$ 优于$\sum_{i=1}^{m} F_i'Y_i$，这与$\sum_{i=1}^{m} F_i'Y_i \sim L'\beta$ 相矛盾. 故充分性得证.

由以上引理及定理，得到如下结果：

定理 2　在模型(1)和(2)下，若 KBL 可估，则下列条件是等价的

(1) $\sum_{i=1}^{m} D_iX_iF_i \overset{\mathscr{L}_1}{\underset{1}{\sim}} KBL$　(2) $\sum_{i=1}^{m} D_iX_iF_i \overset{\mathscr{L}_1}{\underset{2}{\sim}} KBL$

(3) $\sum_{i=1}^{m} D_iX_iF_i \overset{\mathscr{L}_1}{\underset{3}{\sim}} KBL$　(4) $\sum_{i=1}^{m} D_iX_iF_i \overset{\mathscr{L}_1}{\underset{4}{\sim}} KBL$

(5) $\sum_{i=1}^{m} D_iX_iF_i \overset{\mathscr{L}_1}{\underset{5}{\sim}} KBL$　(6) $\sum_{i=1}^{m} D_iX_iF_i \overset{\mathscr{L}_1}{\underset{6}{\sim}} KBL$

(7) (i) $D_iV = D_iA(A'T_1^+A)^-A'T_1^+V$

$F_i'U = F_i'C(C'T_2^+C)^-C'T_2^+U,\ i=1,2,\cdots,m$

(ii) $F_1'U = k_1F'U,\cdots,F_m'U = k_mF'U,\ k_1\geqslant 0,\cdots,k_m\geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{m} k_i = 1,\ F=\sum_{i=1}^{m} F_i$

(iii) $F'C'GCF \leqslant L'G'CF$

(iv) $\mathscr{U}(F'C'-L')=\mathscr{U}[(F'C'-L')GL']$

3 $\mathscr{L}_2$ 中的可容许估计

定理 3 在模型(1)和(2)下,若 KBL 可估,则下列条件是等价的:

(1) $\sum_{i=1}^{m} D_iX_iF_i+M \overset{\mathscr{L}_2}{\underset{1}{\sim}} KBL$ (2) $\sum_{i=1}^{m} D_iX_iF_i+M \overset{\mathscr{L}_2}{\underset{2}{\sim}} KBL$

(3) $\sum_{i=1}^{m} D_iX_iF_i+M \overset{\mathscr{L}_2}{\underset{3}{\sim}} KBL$ (4) $\sum_{i=1}^{m} D_iX_iF_i+M \overset{\mathscr{L}_2}{\underset{4}{\sim}} KBL$

(5) $\sum_{i=1}^{m} D_iX_iF_i+M \overset{\mathscr{L}_2}{\underset{5}{\sim}} KBL$ (6) $\sum_{i=1}^{m} D_iX_iF_i+M \overset{\mathscr{L}_2}{\underset{6}{\sim}} KBL$

(7) (i) $\sum_{i=1}^{m} D_iX_iF_i \overset{\mathscr{L}_2}{\underset{k}{\sim}} KBL$, $k=1,2,\cdots,6$

(ii) $M=MP_{(\sum_{i=1}^{m} CF_i-L)'}$

证略.

参 考 文 献

1 陈清平. 多元线性模型中共同均值参数的线性估计的可容许性. 应用概率统计, 1995, 11(2): 44

2 潘建新. 增长曲线模型回归系数线性估计的可容许性. 应用数学学报, 1989, 12(4): 456

3 胡飞芳. 线性模型中共同均值的线性估计的可容许性. 应用概率统计, 1991, 7(3): 275

4 吴启光. 一般的 Gauss-Markoff 模型中回归系数的线性估计的可容许性. 应用数学学报, 1986, 9(2): 251

ADMISSIBLE LINEAR ESTIMATE OF A COMMON MEAN OF REGRESSION COEFFICIENTS

Wang Zhizhong Zhang Genming

(Department of Applied Mathematics and Applied Software, Central South University of Technology, Changsha, 410083, China)

ABSTRACT

In this paper, we consider the admissibility of linear estimates of a common mean of regression coefficients in growth curve molels. We give the necessary and sufficient conditions under six different optimality and prove that they are identical in the class of homogenous and nonhomogenous linear estimates respectively.

Key words statistical models; mean value; admissibility