

工程地质中瑞利波法勘探的理论初探

黄嘉正 周鸿秋 关小平

(中国地质大学(武汉)应用地球物理系)

摘 要

本文以水平层状液体为模型,推导出瑞利面波的频散方程,进而作了多层介质的模型试算并绘出了瑞利波波速与波长的关系曲线。该曲线对应于弹性分界面上的异常特征与实测曲线的异常特征吻合,可用于说明层状介质中瑞利面波勘探的机制。文中还以理论模型试算结果为依据,对当前面波勘探中的半波长解释方法作了评述,并解释了固体层状介质中面波曲线的异常特征。

瑞利面波在传统的地震勘探中是干扰波。1960年美国密西西比州维克斯巴古市陆军工兵队的水路实验室研究过利用瑞利面波进行地质勘探的新方法,但由于从测定到解释都遇到了一系列难以解决的问题而在实践中得不到应用。80年代日本VIC株式会社研制出利用瑞利波进行勘探的GR—810全自动地下勘探机。1987年我国铁道部第四勘测设计院首先引进了该仪器,并在京广复线、广州高速公路等工点开展了面波勘探。88年河北省地矿局物探大队利用瑞典的信号增强型地震仪配上国产仪器设备组装的稳态震源,建立起面波勘探数据采集系统,进行了瑞利面波勘探试验。应用结果表明:对应于介质的分界面,面波的平均速度—深度关系曲线有异常显示,用它可以划分层面位置,进而换算各层的面波波速 V_{Rn} 。

与传统的体波勘探相比,瑞利波勘探工效高、成本低;源检距小,几乎不受施工场地的限制;面波的能量大,易于观测;波速 V_R 较低,分辨率高;利用 V_R 可求出横波波速,进而换算出剪切模量、标贯值、地基承载力等参数。因此这一新方法在城市与工程地质调查中具有广泛的应用前景。但是由于这一方法应用时间不长,目前所采用的半波长解释方法,其理论依据还不够完善,应用中发现的许多问题还得不到完满的解决,因而加强对瑞利面波勘探的理论研究是十分必要的。

本文以水平层状液体为模型,推导出瑞利面波的频散方程,进而对多层介质的模型作了试算,并绘出瑞利波波速与波长的关系曲线。该曲线上相应于弹性分界面而呈现的异常特征与实测曲线的异常特征相吻合,可用以说明层状介质中瑞利面波勘探的机制。

采用层状液体介质模型,可以避免固体层状介质中表示横波的矢量位函数的复杂运算,简化了推导过程,所得面波频散方程中各参量之间的相关关系简单明瞭,用于固体层状介质的讨论也不失其一般性。

一、多层液体介质瑞利面波的频散方程

多层液体介质模型如图1,纵波的层速度为: $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m$ 。地表震源处激发的P

波, 可以在界面 1 形成反射 P 波和折射 P 波。因 P 波波速 $\alpha_2 > \alpha_1$, 所以当入射角大于临界角 $(\sin^{-1} \frac{\alpha_1}{\alpha_2})$ 时将发生全反射。这时可以认为 P 波在第一个界面下方成为不均匀 P 波, 即沿 x 方向传播、振幅随深度增加呈指数衰减的波。当它们满足波动方程和边界条件时, 就构成了第一层的瑞利面波。从物理角度考虑, 其实质是当入射角大于临界角时, P 波在地表和界面 1 之间来回反射, 能量局限在层 1 内, 在满足相长干涉的条件下形成了第一层的瑞利面波。上述所谓的不均匀 P 波体现的是经过层 1 反射的相位损失。

若 P 波以小于第一层中的临界角 $(\sin^{-1} \frac{\alpha_1}{\alpha_2})$ 入射, 在界面 1 就会产生折射 P 波并进入第二层介质。该折射 P 波若在第二个界面以大于临界角 $(\sin^{-1} \frac{\alpha_2}{\alpha_3})$

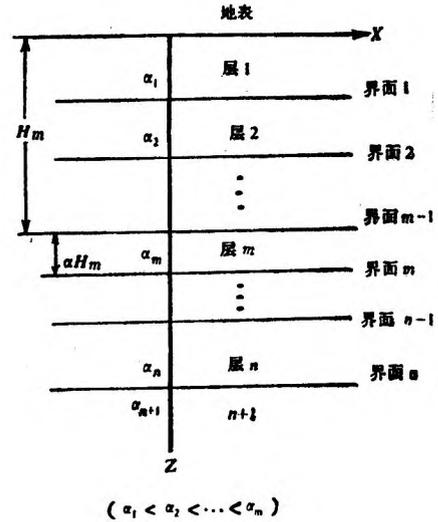


图 1

$(\alpha_3 > \alpha_2)$ 入射, 则 P 波在第二个界面下成为不均匀 P 波, 而在层 1 和层 2 中仍为简谐波, 并满足斯奈尔定律。同理, 若它们还满足波动方程和边界条件时, 就构成了瑞利面波。其物理图象是 P 波于地表和界面 2 之间来回反射, 并满足相长干涉条件。于是, 能量局限于层 1、层 2 内, 沿着介质层传播。本文称这种在地表和界面 2 之间形成的面波为二层 (两层) 瑞利面波。

推而广之, m 层瑞利面波 ($m < n$) 是指 1 至 m 层中的简谐 P 波以大于临界角 $(\sin^{-1} \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m})$ ($\alpha_m > \alpha_{m-1}$) 入射到 m 界面上时相长干涉后形成的面波。

对应于图 1 的模型, 若 $\alpha_{n+1} > \alpha_n > \dots > \alpha_{m+1} > \alpha_m > \dots > \alpha_2 > \alpha_1$, 则存在 n 个瑞利面波, 即一层瑞利面波、两层瑞利面波、... 直至 n 层瑞利面波。

面波最基本的特征是频散现象, 即不同频率的波具有不同的传播速度, 其数学表达式为频散方程。该方程既可以从物理上的相长干涉条件导出, 也可以从波动理论推导。后者的数学问题归纳为: 瑞利波的标量位函数必须满足波动方程 (液体中不考虑矢量位函数); 此外, 还必须满足下面三个边界条件: 1. 地表处应力为 0。2. 各分界面处位移、应力连续。3. 若考虑的是 m 层瑞利面波, 那么在 $m+1$ 层则为不均匀 P 波, 即振幅随深度按指数衰减的波。

导出的 m 层瑞利面波的频散方程为

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{\alpha_{m+1}^2}}} - \frac{1}{\rho_{m+1}} \right) \left(\prod_{i=m}^1 Q_i \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (1)$$

其中

$$Q_i = \begin{pmatrix} \cos \beta_i & \frac{\sqrt{\frac{c^2}{\alpha_i^2} - 1}}{\rho_i} \sin \beta_i \\ -\frac{\rho_i}{\sqrt{\frac{c^2}{\alpha_i^2} - 1}} \sin \beta_i & \cos \beta_i \end{pmatrix}$$

$\beta_i = \sqrt{\frac{c^2}{\alpha_i^2} - 1} \cdot k \cdot dH_i$; α_i —第 i 层中的纵波速度; C —瑞利波的相速度; ρ_i —第 i 层

介质的密度; dH_i —第 i 层介质的厚度; $k = \frac{\omega}{c}$ 为波数; ω —圆频率, $\omega = 2\pi f$, f 为频率。

从数学的角度讨论, P 波在 1 至 m 层内为简谐波, 故 c 必须大于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$; 又 P 波在 $m+1$ 层为不均匀 P 波, 则一定有 c 小于 α_{m+1} 。所以

$$\max(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) < c < \alpha_{m+1}$$

从物理角度分析也可得出上述结论。 m 界面临界角 $r_0 = \sin^{-1} \frac{\alpha_m}{\alpha_{m+1}}$ ($\alpha_m < \alpha_{m+1}$); m 界面处入射角为 r_m 时, 沿 x 方向的视速度为 $\alpha_m / \sin r_m$, 它就是式 (1) 中的瑞利波波速。所以

$$c = \frac{\alpha_m}{\sin r_m}$$

$$r_m = \sin^{-1} \frac{\alpha_m}{c}$$

全反射时要求 $r_m > r_0$, 即 $c < \alpha_{m+1}$ 。

层内为简谐波, 满足斯奈尔定律

$$\frac{\sin r_1}{\alpha_1} = \frac{\sin r_2}{\alpha_2} = \dots = \frac{\sin r_m}{\alpha_m} = \frac{1}{c}$$

所以 $r_i = \sin^{-1} \left(\frac{\alpha_i}{c} \right) < 90^\circ$

显然有 $\alpha_i < c$ 。

给定任意一个 ω , 由公式 (1) 可计算出每个 ω 对应的相速度 c , 绘制出的函数曲线称为频散曲线。它具有下列特征:

1. 正频散 (基谐波), 即随着频率的增加相速度值不断降低。

2. 对于 m 层瑞利面波来说, 当它的波速 c 趋于第 m 层的层速度 α_m 时, 圆频率 ω 将趋于其极大值, 这时频率的极大值记为 $f_{m, \max}$, $f_{m, \max}$ 可由公式 (2) 求出。

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\alpha_m^2}{\alpha_{m+1}^2}}} - \frac{1}{\rho_{m+1}} \right) \left(\prod_{i=m}^1 Q_i \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (2)$$

其中,

$$\text{当 } i = m \text{ 时, } Q_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\rho_m k dH_m & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{当 } i < m \text{ 时, } Q_i = \begin{pmatrix} \cos \beta_i & \frac{\sqrt{\frac{\alpha_m^2}{\alpha_i^2} - 1} \sin \beta_i}{\rho_i} \\ -\frac{\rho_i}{\sqrt{\frac{\alpha_m^2}{\alpha_i^2} - 1}} \sin \beta_i & \cos \beta_i \end{pmatrix}$$

上式中 $\beta_i = \sqrt{\frac{\alpha_m^2}{\alpha_i^2} - 1} \cdot k \cdot dH_i$ 。

(2) 式是 $k \left(= \frac{2\pi f}{\alpha_m} \right)$ 的方程, 即 $F(k) = 0$, 若 $k = k_0$ 为其解, 则 $f_{m, \max} = \frac{k_0 \cdot \alpha_m}{2\pi}$ 。

3. 当 c 趋于 α_{m+1} 时, 频率趋于极小值, 一般称之为截止频率, 以 $f_{m, \min}$ 表示。

4. 方程式(1)和(2)的解有无数个(由于三角函数的多值性), 即给定任意一个相速度 c , 可以有无数个 w 与之对应, 其中最小的 w 称为基频, 其它的为高频, 即依次为二阶频、三阶频..., 本文仅讨论基频的情况。

相对于图 1 中 n 层水平层状介质来说, 存在 n 个瑞利面波, 每个瑞利面波均满足频散方程(1)。 m 取 1 时相当于一层瑞利面波, m 取 2 时相当于两层瑞利面波, $m = n$ 时为 n 层瑞利面波, 每个瑞利面波均有各自的最大频率 $f_{m, \max}$ 和最小频率 $f_{m, \min}$ 。

至于多层固体介质中的求解问题, 已有 Haskell 矩阵法。其中必须考虑到横波的作用, 表达式为 (4×4) 矩阵的连乘。在用于液体情况时, 虽然公式可以简化, 但因涉及到复数运算, 与公式(1)相比, 还是不够简洁明瞭。

为了验证公式(1), 对理论模型进行了两种方法的试算, 由公式(1)和由 Haskell 方法计算出的结果是一致的。

二、理论模型

取 $n = 2$, 即在半无限空间上覆盖两层液体层, 模型的物理参数见图 2。

这时存在两组瑞利面波, 即一层瑞利面波和两层瑞利面波。

图 3 和图 4 是由公式(1)绘制出的一层频散曲线和二层频散曲线。

根据前面的讨论, 可计算出 $f_{2, \max} = 6.94 \text{ Hz}$, 而 $f_{1, \max} = \infty$ 。

又由 $n = 1$ 时(液体半空间上覆盖一厚度为 dH_1 的液体层)的频散方程

$$\frac{w}{c} dH_1 \cdot \sqrt{\frac{c^2}{\alpha_1^2} - 1} = -\tan^{-1} \frac{\rho_2 \sqrt{\frac{c^2}{\alpha_1^2} - 1}}{\rho_1 \sqrt{1 - \frac{c^2}{\alpha_2^2}}} + l\pi$$

当 $c \rightarrow \alpha_2$ 时, $w \rightarrow \frac{\pi \alpha_2}{2dH_1 \sqrt{\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2} - 1}}$

所以 $f_{1, \min} = \frac{w}{2\pi} = 6.13 \text{ (Hz)}$

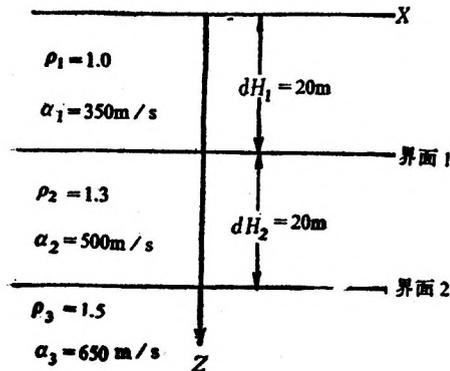


图 2

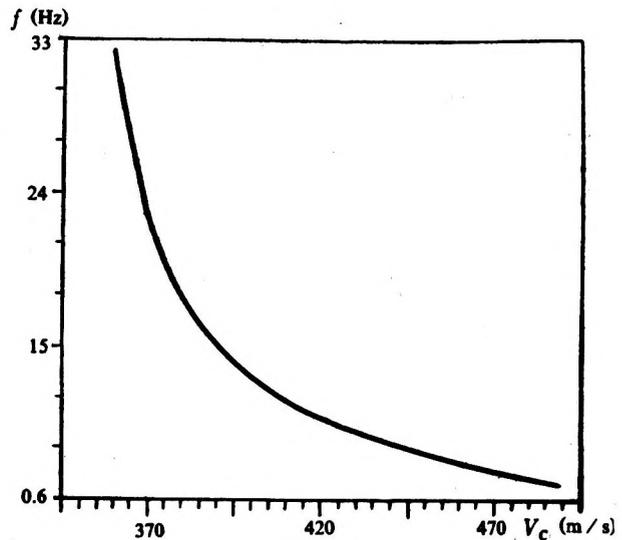


图 3 基频时一层瑞利面波的频散曲线
 $360 < V_c < 490 \text{ (ms)}$

对于二层瑞利面波来说，不能用直接法求 $f_{2, \min}$ ，因为若以 $c = \alpha_3$ 代入 (1) 式，则分母为零。故只能采用逐步逼近的方法，给 α_3 以小增量 δ ，以 $c = \alpha_3 - \delta$ 代入 (1)，当 δ 很小时，所得出的 f 值可近似为 $f_{2, \min}$ 。用上述方法求得的 $f_{2, \min} \cong 4.22 \text{ Hz}$ 。所得各量列于表 1。

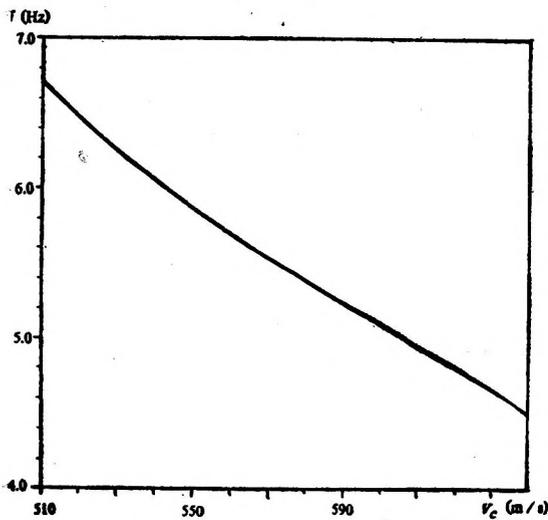


图 4 基频时二层瑞利面波的频散曲线
 $510 < V_c < 640 \text{ (m/s)}$

表 1

m	$f_{m, \min}$	$f_{m, \max}$
1	6.13 Hz	∞
2	4.22 Hz	6.94 Hz

由表中可见，当 $f < 4.22$ 时，不存在瑞利面波； $4.22 < f < 6.13$ 时，仅存在两层的瑞利面波； $6.13 < f < 6.94$ 时，同时存在一层和两层的二个瑞利面波； $f > 6.94$ 时，仅存在一层的瑞利面波。

图 5 是同时收到两个瑞利面波的频率段的频散曲线。

从理论上说，对应于 $6.13 < f < 6.94$ 的频段可以同时收到一层和两层的二个瑞利面波，但由于对应于同一频率，两层的瑞利波波速大于一层的瑞利波波速，对于只判读面波初至的仪器，接收到的是最先抵达的瑞利波，因而在震源频率 $f < 6.94$ 时，检波器记录的只是两层的瑞利面波。图 5 中由于 $f > f_{2, \max} = 6.94 \text{ Hz}$ 时检波器收到的是一层瑞利面波， $f < f_{2, \max}$ 时收到的是两层的瑞利面波，因而在 $f = f_{2, \max}$ 处（即弹性分界面处）曲线出现断点的异常。

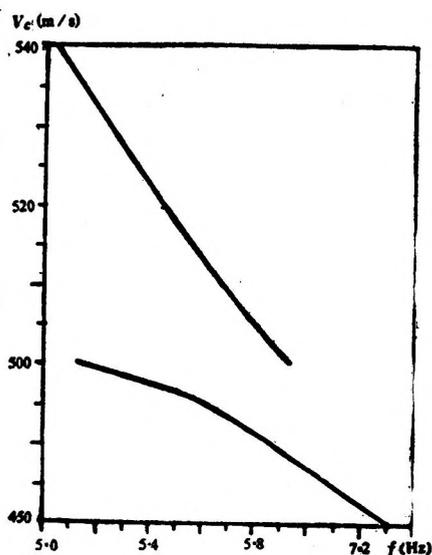


图 5

三、瑞利波法勘探的解释及深度与波长的关系

目前国内外面波勘探, 一般是采用稳态频率可调的震源(例如: 日本VIC的GR-810型全自动地下勘探机), 从高频到低频改变激振频率, 以激发地基产生瑞利波。同时利用安置在地表的二个检波器的已知距离 L 和实测面波走时时差 Δt , 计算出面波波速 $V_c = \frac{L}{\Delta t}$ 。由于

震源频率 f 为已知值, 所以其相应波长 λ 可由

式 $\lambda = \frac{V_c}{f}$ 求得。显然式中的 V_c 是表示震源激

振频率为 f 时地基面波的平均速度。对于高频发射, $\because f$ 大 λ 小, \therefore 面波的穿透深度 D 小;

反之, f 小 λ 大, 穿透深度 D 大。也就是说面波勘探深度与波长 λ 成正比(与震源发射频率 f 成反比)。若定义 K 为波长—深度转换系数,

则 $D = K\lambda = K \frac{V_c}{f}$, K 的大小取决于测点下部

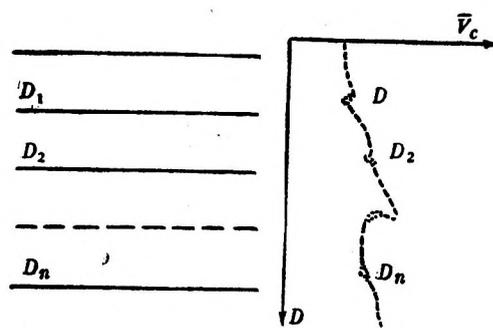


图 6

地层的弹性性质, 一般取 $K = \frac{1}{2}$, 这就是当前人们常用的所谓半波长解释法($D = \frac{\lambda}{2}$)。显然这种方法带有经验的性质。日本的GR-810仪器中备有 K 值的选择开关, 就是为了选定适当的 K 值, 使仪器通过上述原理自动计算并打印出 $V_c - D$ 曲线(如图6)。

为了进一步阐明瑞利面波勘探的机制, 现对理论模型作出的图7的曲线加以说明与解释。首先计算出图2模型的理论频散曲线, 再用 $\lambda = \frac{V_c}{f}$ 转换为 $V_c - \lambda$ 曲线。在 $f = f_{2, \max}$

时一层的瑞利波波速为 V_{c1} , 则有 $\lambda_1^* = V_{c1} / f_{2, \max}$, 二层的瑞利波波速为 V_{c2} , $\lambda_2^* = V_{c2} / f_{2, \max}$, 因为 $V_{c2} > V_{c1}$, 故 $\lambda_2^* > \lambda_1^*$ 。当 $\lambda < \lambda_1^*$ 时, 曲线代表的是第一层瑞利面波的 $\lambda - V_c$ 的函数关系; 当 $\lambda > \lambda_2^*$ 时曲线反映的是二层的瑞利面波 $\lambda - V_c$ 的函数关系。因此曲线在 λ_1^* 与 λ_2^* 之间出现了间断, 并且上下两段的斜率发生了改变。这两个异常特征可作为面波勘探中划分弹性分界面的标志。

为了考查曲线断点的变化与地层厚度 dH_1 和 dH_2 的关系, 试算了三组模型。三组模型的 $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 等的值同图 2 所示, 改变的只是参数 dH_1 和 dH_2 。模型 1: dH_1 恒为 20m, dH_2 分别为 20m、15m 和 10m; 模型 2: dH_1 与 dH_2 之和恒为 40m, dH_1 分别为 10、20 和 30m, 相应的 dH_2 为 30、20 和 10m; 模型 3: dH_1 分别为 10、20 和 30m, dH_2 则恒为 20m。表 2 为计算结果。图 7 为 $\lambda - V_c$ 关系曲线。对图 7 的分析可得出下述结论。

表 2

	a	b	c	a	b	c	a	b	c
$dH_1(m)$	20.0	20.0	20.0	30.0	20.0	10.0	30.0	20.0	10.0
$dH_2(m)$	20.0	15.0	10.0	10.0	20.0	30.0	20.0	20.0	20.0
$f_{1, \min}(Hz)$	6.13	6.13	6.13	4.08	6.13	12.3	4.08	6.13	12.3
$f_{2, \max}(Hz)$	6.94	7.05	7.19	4.87	6.94	13.1	4.72	6.94	13.4
$\lambda_1^*(m)$	70.4	68.9	67.3	98.5	70.4	37.8	102.8	70.4	36.9
$\lambda_2^*(m)$	72.0	70.9	69.6	102.7	72.0	38.1	105.8	72.0	37.4

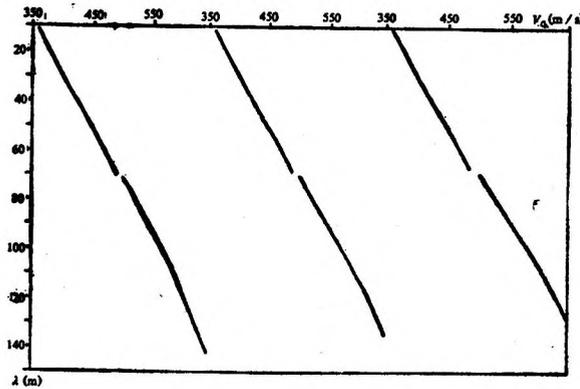


图 7(a) 模型1的 $\lambda - V_c$ 曲线

1. 第一组模型 dH_1 相同, dH_2 不同, 图7(a)中标志点位置基本上一致, 与上层的厚度 dH_1 相应; 第二、第三组模型所得曲线(图7(b)及(c))的断点位置也和第一层层厚 dH_1 一一对应。根据这些结果可归纳为: 标志点的位置取决于第一层的层厚 dH_1 。

本文仅讨论了两层液体层覆盖液体半空间的瑞利面波问题, 这时只存在一个特征点 $f_{2, \max}$ 。可以设想, 若是三层瑞利面波将会有两个特征点 $f_{2, \max}$ 和 $f_{3, \max}$ 。第一个特征点的位置取决于层 1 的厚度 dH_1 , 而第二个特征点的位置则取决于层 1 和层 2 的厚度 dH_1 和 dH_2 。

2. dH_1 和 λ_2^* 之间存在着简单的线性关系, 把上述三个模型中 7 组 $\lambda_2^* - dH_1$ 标于图 8 并列

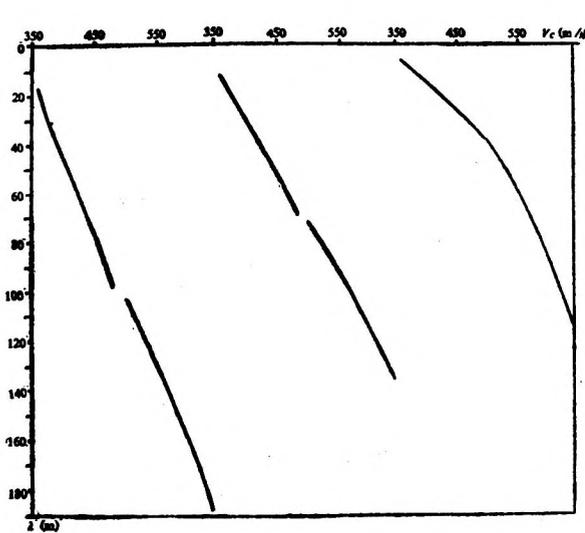


图 7(b) 模型2的λ—V_c曲线

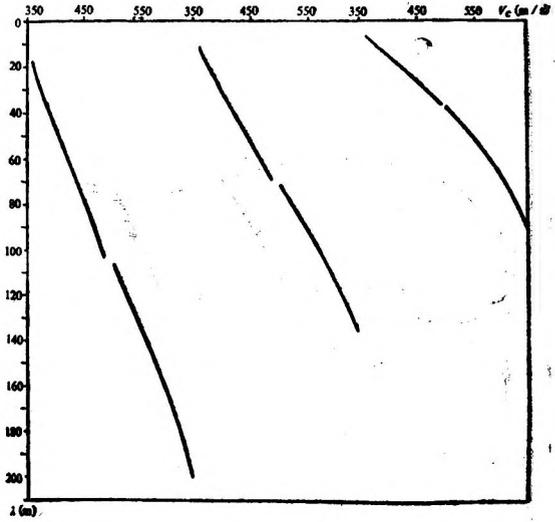


图 7(c) 模型3的λ—V_c曲线

于表 3，它们呈现出线性关系。比例系数（即波长—深度转换系数） $K = \frac{dH_1}{\lambda} \cong \frac{1}{3.5}$ ，表

明半波长解释法并不适用于所有模型。究竟 dH_1 和 λ 的比值 K 是多少，这需要具体分析。可以通过以已知物性为参数的理论模型试算求出其比值，亦可由已知钻孔资料和曲线特征点的相关关系求出此系数。

工程勘探的主要对象是固体介质，固体介质中瑞利面波必然包含横波成份。图 9 为无限半空间上覆盖厚度为 H 的固体模型瑞利波的频散曲线（摘自参考文献〔1〕的图 7.27）。两支曲线均为基阶瑞利面波的频散曲线， M_1 支为对称振型，地表质点运动轨迹为逆进椭圆； M_2 支为反对称振型，地表质点运动轨迹为顺进椭圆。它们与一层液体瑞利波一样，均存在截止频率，上限频率为 ∞ ，曲线基本上呈单调下降趋势，为正频散。

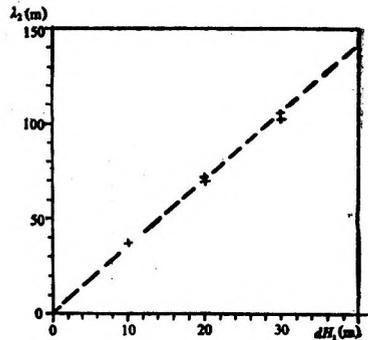


图 8

表 3

	1	2	3	4	5	6	7
$dH_1(m)$	10.0	10.0	20.0	20.0	20.0	30.0	30.0
$\lambda_2^*(m)$	38.1	37.4	72.0	70.9	69.6	102.7	105.8

M_1 型的上限速度是 $0.9194\beta_2$ （当泊松比为 $1/4$ 时），下限速度为 $0.9194\beta_1$ ； M_2 型的上限速度是 β_2 ，下限速度为 β_1 。总而言之，一层固体的瑞利波可达到的上限速度是 β_2 ，下限速度是 $0.9194\beta_1$ 。以此类推，二层瑞利面波的上限、下限速度分别为 β_3 和 $0.9194\beta_2$ ，在迭合处其曲

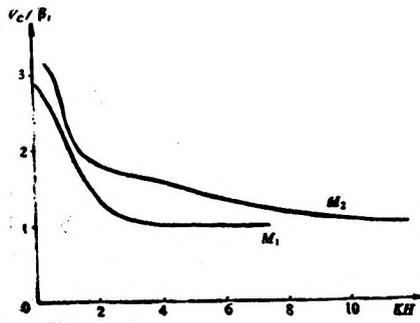


图 9

β —横波速度; $\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \sqrt{3}$; $\frac{\beta_2}{\beta_1} = 3.147$; $\frac{\rho_2}{\rho_1} = 1.39$

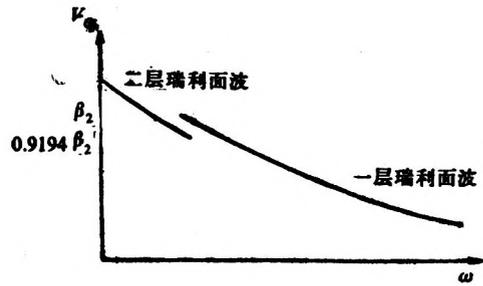


图 10

线应如图10。于是 $f_{1, \min}$ 将成为特征点。当 $f > f_{1, \min}$ 时接收的是一层瑞利面波, 当 $f < f_{1, \min}$ 时则为二层瑞利面波。这时有 $V_{c1} > V_{c2}$, 因而 $\lambda_1^* = \frac{V_{c1}}{f_{1, \min}} > \lambda_2^* = \frac{V_{c2}}{f_{1, \min}}$, 这意味着在曲线突变处将发生回折。上述看法仅属推断, 尚需验证。无论如何, 固体介质和液体介质的瑞利面波的频散曲线上均存在着代表不同层次瑞利面波的标志点, 绘成 $V_c-\lambda$ 或 V_c-D 曲线后, 标志点处将出现一个突变, 液体理论模型时表现为一个间断, 固体实际模型为一“之”字型回折。若比例系数选择合适, 该特征点的深度就代表了界面深度。这就是层状介质中瑞利面波的勘探机制。图11是GR—810仪器在株州师专图书馆楼测区ZK—9号孔旁的实测 V_c-D —

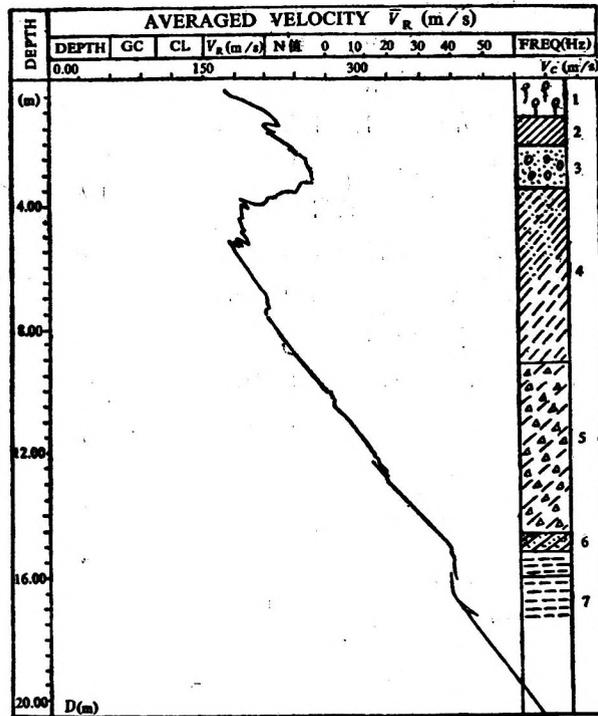


图 11 株州市师专ZK—9号孔旁GR—810型面波仪实测曲线

1—回填土; 2—可硬塑粘土; 3—砂砾卵石层; 4—硬塑残积砂粘土; 5—砂砾碎石土层; 6—砂粘土; 7—强风化钙泥质粉砂岩

D 曲线。由图中深度 D 与面波平均速度 V_s 的关系可见，浅层曲线的锯齿状异常和深层的“之”字异常的深度与地层分界面的位置基本吻合。

铁道部第四勘测设计院物探队为本文提供了GR—810全自动地下勘探机的实测资料，在此表示感谢。

参 考 文 献

- 〔1〕 傅淑芳等编：1980年，地震学教程（上册），地震出版社。
- 〔2〕 萨瓦林斯基·E. Φ：1981年，地震波，科学出版社。
- 〔3〕 巴特·M：1976年，地震学的数学问题，科学出版社。
- 〔4〕 VIC株式会社：佐藤式全自动地下勘探机——利用VIC GR—810型机的地下勘探实例集。

THEORETICAL STUDY OF THE RAYLEIGH-WAVE TECHNIQUE IN ENGINEERING GEOLOGY

Huang Jiazheng, Zhou Hongqiu, Guan Xiaoping

(*Department of Applied Geophysics, China University of Geosciences(Wuhan)*)

Abstract

In this paper dispersion equations of Rayleigh waves are derived on the basis of a horizontal layered liquid model. Furthermore, calculation on multi-layered media is made and curves of Rayleigh wave velocity with respect to wavelength are drawn. Anomaly characteristics on the curves, which correspond to elastic subsurfaces, agree well with those on curves measured in practice, and reasonably show the mechanism of exploration in layered media by Rayleigh-wave technique. With calculations of the theoretical model, the authors also offer comments on the half-wave-length interpretation method which is currently used in surface wave exploration and explain the anomaly characteristics on curves recorded from solid layered media.