

# 任意曲线边界条件下缓变水深水域 波浪传播的数值模拟

张洪生<sup>1</sup>, 洪广文<sup>2</sup>, 丁平兴<sup>1</sup>

(1. 华东师范大学 河口海岸国家重点实验室, 上海 200062; 2. 河海大学 港口航道及海岸工程学院, 江苏 南京 210024)

**摘要:** 缓坡方程被广泛地应用于描述波浪的传播变形计算, 目前一般采用矩形网格求解. 将计算域剖分为任意四边形网格, 以格林公式为基础, 在变量沿单元边界线性变化的假定下, 对双曲型的波能守恒方程、波数矢无旋性方程进行离散, 同时通过等参单元变换推求节点偏导数值以离散椭圆型光程函数方程, 从而建立了任意曲线边界条件下缓变水深水域波浪传播的数值模拟模型. 将模型应用于平行直线型等深线地形, 并将计算域剖分为不规则四边形网格, 对不同入射角、底坡、波高等多种组合情况比较了数值解与解析解, 结果表明两者一致. 应用于复杂边界的实例, 数值模拟结果与物模实验值基本吻合.

**关键词:** 任意四边形; 格林公式; 等参单元; 数值模拟

中图分类号: O35.5

文献标识码: A

文章编号: 0253 - 4193(2002)01 - 0108 - 09

## 1 引言

当把缓变水深水域波浪传播模型用于数值模拟较大范围波浪场时, 比较多的是将计算区域剖分为规则矩形网格, 进行有限差分离散. 虽然有限元法对边界具有较强的适应性, 但由于用该法求解缓坡方程时需要全部计算域进行联立求解, 并且所求解的方程组并不是对角占优, 所需计算机内存较大、计算耗时长, 故只适用于小范围的计算域<sup>[1]</sup>. 对实际工程所经常遇到的任意曲线边界, 如果将不规则曲线边界的物理区域变换为规则边界的矩形区域进行有限差分离散, 也还存在着局限性. 变换的方法包括解析变换和数值变换. 解析求解正交曲线坐标系只适用于简单、典型水域边界; 若进行数值变换求解则需要两种近似, 即坐标变换和控制方程变换, 求解过程复杂并且会导致求解精度的降低. 直线斜交曲线<sup>[2]</sup>虽适用于折线形

收稿日期: 2000 - 09 - 28; 修订日期: 2001 - 04 - 12.

基金项目: 国家杰出青年基金资助项目(49825161).

作者简介: 张洪生(1967—), 男, 山东省高唐县人, 工程师, 博士, 从事河口海岸动力学的研究.

边界, 坐标及控制方程变换较为简单, 但不适用于折线边界与口门夹角等于或大于  $90^\circ$ . 本文以任意四边形网格剖分计算域, 以格林公式为基础, 离散双曲型的波能守恒方程和波数矢无旋性方程, 通过等参单元变换推求节点偏导数值<sup>[3-7]</sup>以离散椭圆型光程函数方程, 建立了大范围任意曲线边界条件下缓变水深水域波浪传播的数值模拟模型. 在地形为平行直线型等深线这一特殊地形, 并将计算域剖分为不规则网格这一情况下, 比较解析解和数值解. 将模型应用于曲线边界的实例.

## 2 缓变水深水域波浪传播的数学模型

Berkhoff<sup>[8]</sup>提出的缓坡方程, 是用线性波浪理论研究近岸波浪传播变形的的基础方程. 众多学者围绕缓坡方程的数值求解方法、方程的简化与近似和方程的改进等做了大量研究. 洪广文<sup>[9]</sup>提出了考虑能量耗散作用的缓变水深水域波浪传播理论模型, 其表达式可概括如下:

(1) 波浪传播的缓坡方程为

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \omega^* \right) \Phi \cdot \nabla \cdot (\tilde{c} \tilde{c}_g \nabla \Phi) + (\tilde{\sigma}^2 + J \cdot k^2 \tilde{c} \tilde{c}_g) \Phi = 0, \quad (1)$$

式中,  $J = g \left\{ \int_{-h}^0 F \nabla^2 F dz + F \nabla F \cdot \nabla h |_{z=-h} \right\} \approx O(\delta^2)$ ;

(2) 波数守恒方程为

$$\frac{\partial \vec{K}}{\partial t} + \nabla \omega = 0, \quad (2)$$

或  $\omega$  为常数(定常波情况);

(3) 弥散关系式为

$$\tilde{\sigma}^2 = gk \tanh(kh) = \omega^2 \left( 1 + \frac{(\omega^*)^2}{4\omega^2} \right); \quad (3)$$

(4) 波数矢无旋性方程为

$$\nabla \times \vec{K} = 0, \quad (4)$$

上述各式中,

$$F(h, z) = \frac{\cosh[k(z+h)]}{\cosh(kh)}; \quad (5)$$

波动速度势为

$$\varphi(x, y, z, t) = F(h, z) \Phi(x, y, t); \quad (6)$$

复振幅为

$$\Phi(x, y, t) = -igR(x, y, t)e^{i\Psi(x, y, t)}; \quad (7)$$

$$\vec{K} = \nabla \Psi; \quad (8)$$

能量耗散系数为

$$\omega^* = \frac{4f_w H}{3\pi g} \left( \frac{K\omega}{k \sinh(kh)} \right)^3; \quad (9)$$

$h(x, y)$  为水域水深;  $g$  为重力加速度;  $R = H/(2\omega)$ ,  $H$  为波高;  $k$  为不考虑绕射作用时的波数;  $K$  为考虑绕射作用后的波数;  $\omega$  为圆频率;  $f_w$  为底摩阻系数.

为便于数值计算,将式(7)代入式(1),分离实部和虚部可得到由波作用守恒方程和光程函数方程所组成的与式(1)等价的控制方程组.考虑定常条件下的波浪传播,将波数矢无旋性方程、波作用守恒方程和光程函数方程分别化为便于数值计算的下列表达式:

波数矢无旋性方程为

$$\frac{\partial K_y}{\partial x} - \frac{\partial K_x}{\partial y} = 0; \quad (10)$$

波作用守恒方程为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( H^2 \bar{c}_g \frac{K_x}{k} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( H^2 \bar{c}_g \frac{K_y}{k} \right) = -w^* H^2; \quad (11)$$

光程函数方程为

$$K^2 = k^2 + \frac{1}{H} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{H \bar{c}_g} \left[ \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial(\bar{c}_g)}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial(\bar{c}_g)}{\partial y} \right] - \frac{(w^*)^2}{4 \bar{c}_g} \quad (12)$$

### 3 边界条件

#### 3.1 固壁边界和开边界

洪广文等<sup>[2]</sup>建立了考虑固体界面具有不完全反射特性的边界条件,其边界条件为第三类(Robin)边界条件,具体表达式形式见文献[2].

#### 3.2 起始边界条件

起始边界多为外海边界,事先给定波要素如入射波高  $H^*$ , 波周期  $T^*$  和入射波角  $\alpha^*$

### 4 控制方程的离散

因为波数矢无旋性方程和波能守恒方程都是双曲型方程,而且波能主要是沿波数矢方向传递,故上述两个方程难以应用有限元法或任意四边形等参单元差分法.利用格林公式可将单元的面积分近似地用单元节点的函数值表达,所以将沿着上述思路离散波数矢无旋性方程和波能守恒方程.因为光程函数方程为椭圆型方程,并且直接求解节点的值,故将通过单元等参变换推求节点偏导数表达式.因此,采用这两种离散方法可建立简便的适用于以不规则网格剖分任意曲线边界的控制方程离散格式<sup>[5]</sup>

#### 4.1 波能守恒方程及波数矢无旋性方程的离散

##### 4.1.1 格林公式的应用

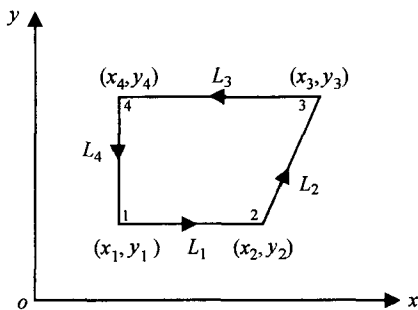


图 1

利用格林公式将图 1 中的面积分转化为线积分:

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L (P dx + Q dy), \quad (13)$$

式中,  $L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$ ;  $P, Q$  均代表函数. 设单元编号为  $e$ , 根据二重积分的中值定理, 在  $e$  单元内肯定存在一点  $(x_0, y_0)$  使得下式成立:

$$\left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)_{(x_0, y_0)} = \frac{1}{S_e} \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad (14)$$

假定函数在单元边界上为线性变化,应用格林公式近似

有下列两式成立:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} = \frac{1}{2S_e} [Q(1, e)A(1, e) + Q(2, e)A(2, e) + Q(3, e)A(3, e) + Q(4, e)A(4, e)], \quad (15)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} = \frac{1}{2S_e} [P(1, e)B(1, e) + P(2, e)B(2, e) + P(3, e)B(3, e) + P(4, e)B(4, e)], \quad (16)$$

式中,  $S_e$  为任意四边形的面积, 并且

$$S_e = \frac{1}{2} \left\{ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \right\}; \quad (17)$$

$$A(1, e) = y_2 \cdot y_4; A(2, e) = y_3 \cdot y_1; A(3, e) = y_4 \cdot y_2; A(4, e) = y_1 \cdot y_3; \quad (18)$$

$$B(1, e) = x_4 \cdot x_2; B(2, e) = x_1 \cdot x_3; B(3, e) = x_2 \cdot x_4; B(4, e) = x_3 \cdot x_1. \quad (19)$$

函数  $f$  在  $e$  单元上的积分  $\iint_{\Omega} f dx dy$  可以近似表示为

$$\iint_{\Omega} f dx dy = w_i f(i, e), \quad (20)$$

式中,  $w_i$  为权重因子. 这样, 将偏导数的面积分用节点的函数值近似表达.

#### 4.1.2 波能守恒方程和波数矢无旋性方程的离散

无论波能守恒方程还是波数矢无旋性方程都可归结为下列形式:

$$F \frac{\partial Q}{\partial x} + G \frac{\partial Q}{\partial y} = R, \quad (21)$$

式中,  $Q$  代表波向  $\alpha$  或波高  $H$ .

对于图 2 中的任意两个单元  $e$  和  $e+1$ , 下列表达式成立:

$$\iint_{\Omega_e} \left( F \frac{\partial Q}{\partial x} + G \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{\Omega_e} R dx dy, \quad (22)$$

$$\iint_{\Omega_{e+1}} \left( F \frac{\partial Q}{\partial x} + G \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{\Omega_{e+1}} R dx dy. \quad (23)$$

假设左侧为入流边界, 第  $I$  排的  $Q$  值已知, 推求第  $I+1$  排的  $Q$  值. 根据式(13)~(16), 式(22)和(23)分别有如下形式:

$$\begin{aligned} & [A(2, e)F_e + B(2, e)G_e]Q(2, e) + [A(3, e)F_e + B(3, e)G_e]Q(3, e) \\ & = 2R_e S_e \cdot [A(1, e)F_e + B(1, e)G_e]Q(1, e) \cdot \\ & \quad [A(4, e)F_e + B(4, e)G_e]Q(4, e), \quad (24) \\ & [A(2, e+1)F_{e+1} + B(2, e+1)G_{e+1}]Q(2, e+1) + \\ & \quad [A(3, e+1)F_{e+1} + B(3, e+1)G_{e+1}]Q(3, e+1) \end{aligned}$$

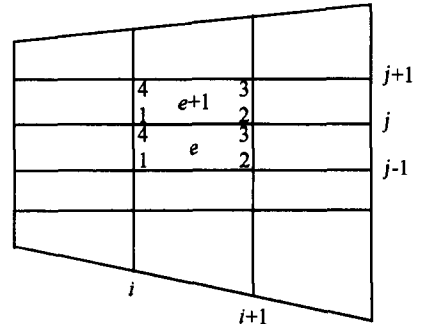


图 2

$$= 2R_{e+1}S_{e+1} \cdot [A(1, e+1)F_{e+1} + B(1, e+1)G_{e+1}]Q(1, e+1) \cdot [A(4, e+1)F_{e+1} + B(4, e+1)G_{e+1}]Q(4, e+1). \tag{25}$$

由于波能主要沿波数矢方向传递, 因  $e$  单元第 4 点上波数矢的射线并不一定落在  $e$  单元内, 它也完全可能落在  $e+1$  单元内, 故而将式(24)和(25)相加, 得

$$\begin{aligned} & [A(2, e)F_e + B(2, e)G_e]Q(2, e) + [A(3, e)F_e + B(3, e)G_e + A(2, e+1)F_{e+1} + \\ & B(2, e+1)G_{e+1}]Q_{i+1, j} + [A(3, e+1)F_{e+1} + B(3, e+1)G_{e+1}]Q(3, e+1) \\ & = 2(R_eS_e + R_{e+1}S_{e+1}) \cdot [A(1, e)F_e + B(1, e)G_e]Q(1, e) \cdot \\ & \cdot [A(4, e)F_e + B(4, e)G_e]Q(4, e) \cdot [A(1, e+1)F_{e+1} + B(1, e+1)G_{e+1}] \times \\ & Q(1, e+1) \cdot [A(4, e+1)F_{e+1} + B(4, e+1)G_{e+1}]Q(4, e+1), \end{aligned} \tag{26}$$

式中,  $i, j$  是总体编号;  $e$  是单元号;  $Q_{i+1, j}$  即为局部节点编号下的  $Q(3, e)$  或  $Q(2, e+1)$ .

### 4.2 光程函数方程的离散

对于图 2 中的任意四边形, 在任意单元  $e$  内的函数值  $f(x, y)$  为线性变化, 引入等参变量  $\zeta, \xi$  可得

$$f(x, y) = \varphi_N(\zeta, \xi)f_N, \quad N = 1, 2, 3, 4, \tag{27}$$

等参函数为

$$\varphi_N(\zeta, \xi) = \frac{1}{4}(1 + \zeta_N\zeta)(1 + \xi_N\xi),$$

式中,  $\zeta_1 = -1, \zeta_2 = 1, \zeta_3 = 1, \zeta_4 = -1, \xi_1 = -1, \xi_2 = -1, \xi_3 = 1, \xi_4 = 1, -1 \leq \zeta \leq 1, -1 \leq \xi \leq 1$  (图 3). 在以节点  $P$  为顶点的所有单元上(图 4), 令

$$\sum_{e=1}^M \iint_{S_e} \frac{\partial f}{\partial x} dS_e = \frac{\partial f(P)}{\partial x} \cdot S, \tag{28}$$

式中,  $S$  为与点  $P$  相邻单元面积  $S_e$  的总和, 即  $S = \sum_e S_e$ ;  $M$  为与点  $P$  相邻单元的个数. 由式(28)可得

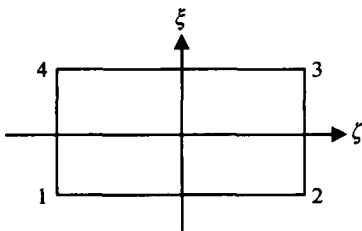


图 3

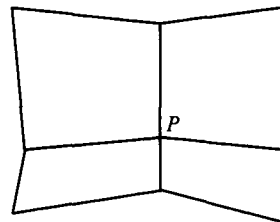


图 4

$$\frac{\partial f(P)}{\partial x} = \frac{1}{S} \sum_{e=1}^M \iint_{S_e} \frac{\partial f}{\partial x} dS_e. \tag{29}$$

将式(27)代入式(29)得

$$\frac{\partial f(P)}{\partial x} = \frac{1}{S} \sum_{e=1}^M \iint_{S_e} \frac{\partial(\varphi_N f_N)}{\partial x} dx dy = \frac{1}{2S} \sum_{e=1}^M \sum_{N=1}^4 A_N \cdot f_N, \tag{30}$$

同理,

$$\frac{\partial f(P)}{\partial y} = \frac{1}{2S} \sum_{e=1}^M \sum_{N=1}^4 B_N \cdot f_N, \quad (31)$$

式中,  $A(N, e)$  和  $B(N, e)$  的表达式同式(18)和(19)。

由于假定函数值在单元上是线性变化,不能由类似于式(29)的表达式直接推求节点二阶导数,否则可得出  $\partial^2 f(P)/\partial x^2$  是常数,而与节点值无关,因此应由求得的一阶导数代入式(30)和(31)来推求节点二阶导数值:

$$\frac{\partial^2 f(P)}{\partial x^2} = \frac{1}{2S} \sum_{e=1}^M \sum_{N=1}^4 A_N \cdot f_{xN}, \quad (32)$$

$$\frac{\partial^2 f(P)}{\partial y^2} = \frac{1}{2S} \sum_{e=1}^M \sum_{N=1}^4 B_N \cdot f_{yN}. \quad (33)$$

光程函数方程的离散形式为

$$K_{i,j}^2 = k_{i,j}^2 + \frac{1}{H_{i,j}} \left[ \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right)_{i,j} + \left( \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right)_{i,j} \right] + \left( \frac{1}{H\bar{c}\bar{c}_g} \right)_{i,j} \left\{ \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)_{i,j} \times \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\bar{c}\bar{c}_g) \right]_{i,j} + \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right)_{i,j} \left[ \frac{\partial}{\partial y} (\bar{c}\bar{c}_g) \right]_{i,j} \right\} - \left[ \frac{(w^*)^2}{4\bar{c}\bar{c}_g} \right]_{i,j}, \quad (34)$$

式中,  $i, j$  是总体节点编号. 将各导数代入光程函数方程中即可得计算点的波数.

## 5 模型检验

### 5.1 平行直线型等深线条件下数值解与解析解的比较

首先在平行直线型等深线这一特殊地形上将计算域分割为不规则四边形网格,检验本文所建立的数值模拟模型.文献[2]给出了无水流作用时,平行直线型等深线条件下线性波折射变形的解析-数值解的表达式.在不同波高、入射角和坡度的组合条件下,数值解与解析解的比较结果见图5~7.由模拟结果可见,对于平行直线型等深线情况,无论是正向入射还是斜向入射,又无论是近破碎波高还是较小波高,数值解与解析解都吻合良好,表明模型能有效地模拟平行直线型等深线情况下波浪的传播.

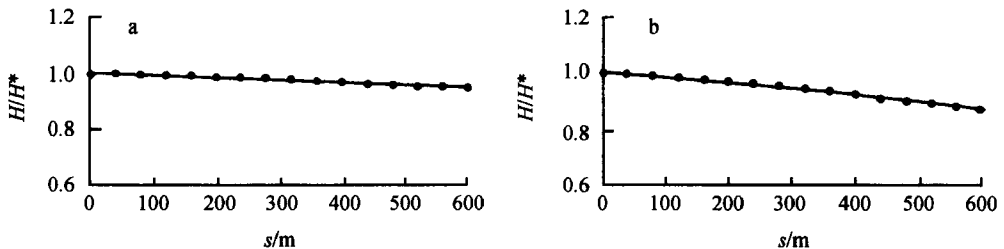


图5 数值模拟计算结果与解析解的比较

坡度为 1:50, 入射波高  $H^* = 3$  m. a. 入射角  $\alpha^* = 0^\circ$ , b. 入射角  $\alpha^* = 60^\circ$ . —— 数值解, · 线性解析解

### 5.2 曲线边界条件下模型的工程应用

在福建某港拟建起步工程二泊位码头,码头岸线为东西走向,码头线长度为 400 m, 宽为 130 m, 标高为 5.5 m(黄海零点). 码头通过引堤与岸线连接,港区口门正对东向. 对工程要求

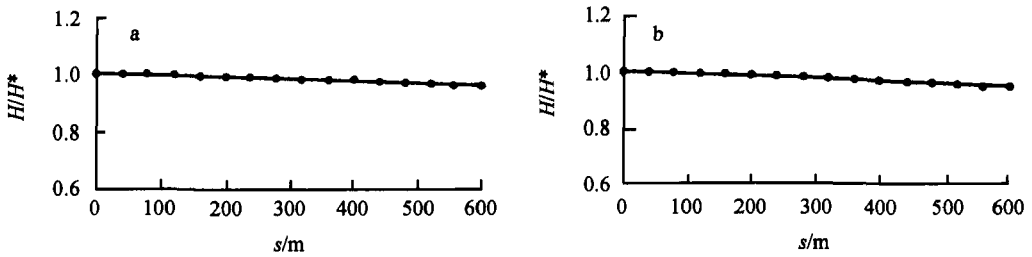


图 6 数值模拟计算结果与解析解的比较

坡度为 1:50, 入射波高  $H^* = 8$  m. a. 入射角  $\alpha^* = 0^\circ$ , b. 入射角  $\alpha^* = 30^\circ$ . — 数值解, · 线性解析解

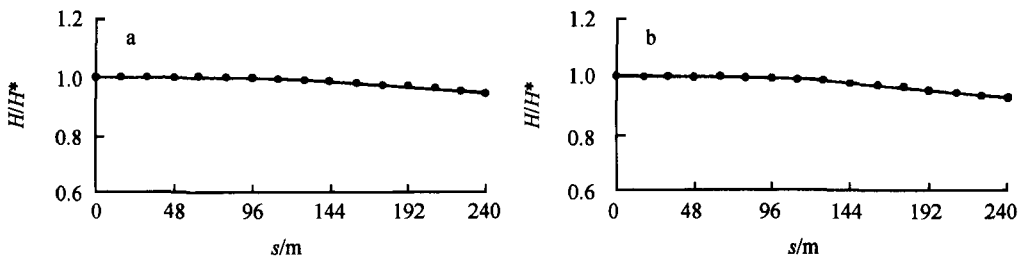


图 7 数值模拟计算结果与解析解的比较

坡度为 1:10, 入射波高  $H^* = 8$  m. a. 入射角  $\alpha^* = 0^\circ$ , b. 入射角  $\alpha^* = 30^\circ$ . — 数值解, · 线性解析解

进行模型实验, 其目的之一在于确定: 在东向浪作用下, 根据起步工程平面布置及水工结构型式, 测定港内波况. 物模实验测点及计算边界见图 8, 计算网格剖分示意图见图 9.

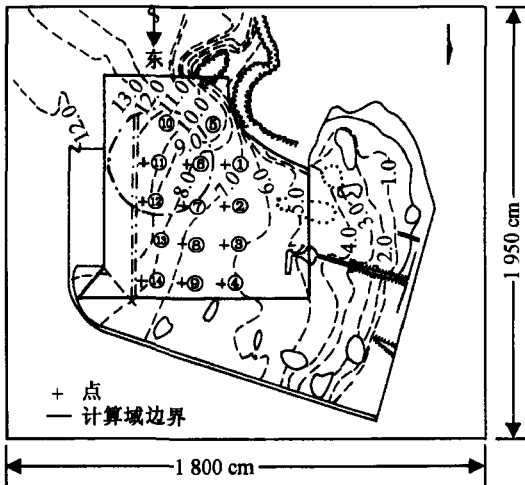


图 8 模型测点布置及计算域边界示意图

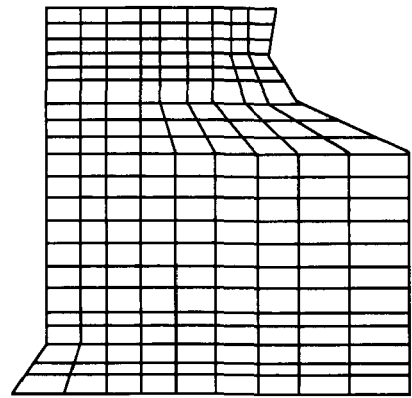


图 9 网格剖分示意图

入射波波高为 5.02 m, 周期为 8.0 s, 选择校核高水位这一水文情况进行数值模拟. 港区边沿曲折多变, 因而用任意四边形网格剖分计算域. 因为模型的模拟采用逐排推进的方法, 不

能考虑反射的影响,因此计算域中不包括有“孤岛”的部分. 码头及引堤为无流量通过的固壁边界,礁石边界为部分反射边界,礁石下游为自由出流的开边界,底摩阻系数取 0.012.

港区内测点的物理实验结果与计算结果对比见图 10 和 11. 结果表明数值计算值与物理实验结果基本吻合:在码头前波浪传播区内波高较大;在波影区内,波高很小,水域平静. 靠近开边界并处于波影区边沿的第一、二两点误差较大,这是因为计算域的右侧部分反射边界曲折复杂,近边界处水深多变;计算域外还有建筑物及礁石的影响,难以做精确数值模拟. 由此可见,模型能较好地模拟曲线边界条件下实际地形上波浪的传播.

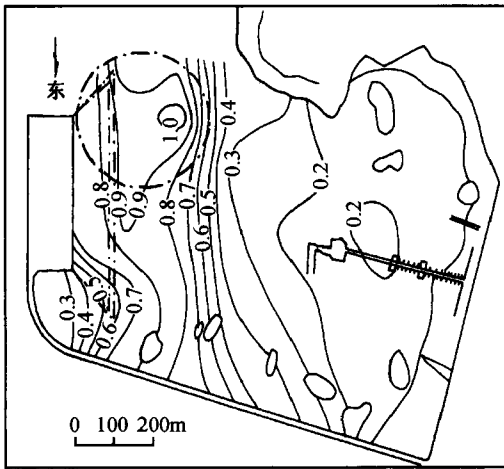


图 10 物理模型实验相对波高等值线图

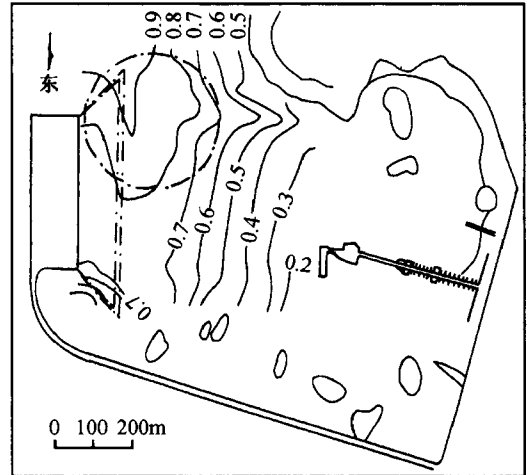


图 11 数值模拟相对波高等值线图

## 6 结语

(1) 本文以格林公式为基础,在变量沿单元边界作线性变化的前提下,对波能守恒方程、波数矢无旋性方程进行离散,同时通过等参单元变换推求节点偏导数值离散光程函数方程,从而建立了任意曲线边界条件下缓变水深水域波浪传播的数值模拟模型.

(2) 在平行直线型等深线这一特殊地形上,将计算域剖分为不规则四边形网格,检验本文的数值模拟模型,结果表明数值解与解析解相一致;通过一个实例应用来表明模型能较好地模拟在复杂边界条件下波浪的传播变形.

(3) 由于本文所建立的数学模型不需要联立求解方程组,而是逐排推进求解,同时本文的模型没有在一个波长范围内取若干个节点的限制,因此节省了计算时间,从而提高了计算效率,但本文的模型没有考虑反射及波浪破碎的情况,本文的模式尚未应用于模拟底部水深变化较为剧烈的区域上的波浪传播.

### 参考文献:

- [1] PANCHANG, V G, PEARCE B R. Combined refraction - diffraction of short-waves in large coastal regions[J]. Coastal Engineering, 1988, 16:245 ~ 266.
- [2] 洪广文, 冯卫兵, 张洪生. 海岸河口水域波浪传播数值模拟[J]. 河海大学学报, 1999, 27(2):27(2):1 ~ 9.
- [3] 章本照. 流体力学中的有限元方法[M]. 北京:机械工业出版社, 1986. 226 ~ 235.



- [4] 赵士清. 长江口潮流的一种数值模式[J]. 海洋与湖沼, 1985, 16(1):18~27.
- [5] 李荣华, 冯果枕. 偏微分方程数值解法[M]. 北京:人民教育出版社, 1980. 144~148.
- [6] 窦希萍, 李 来. 二维潮流数学模型的四边形等参单元法[J]. 海洋工程, 1995, 13(2):47~53.
- [7] 张洪生. 非线性波传播的数值模拟[D]. 南京:河海大学, 2000. 162~197.
- [8] BERKHOFF J C W. Computation of combined refraction-diffraction[A]. Proc 13th Conf on Coastal Engineering[C]. Vancouver, Canada: ASCE, 1972. 471~490.
- [9] HONG Guang-wen. Mathematical models for combined refraction-diffraction of wave on nonuniform current and depth[J]. China Ocean Engineering, 1996, 10(4):433~454.

## Numerical simulation of wave propagation in water of slowly varying topography with complicated boundary

ZHANG Hong-sheng<sup>1</sup>, HONG Guang-wen<sup>2</sup>, DING Ping-xing<sup>1</sup>

- (1. State Key Laboratory of Estuarine and Coastal Research, East China Normal University, Shanghai 200062, China ;  
2. College of Harbor, Waterway and Coastal Engineering, Hohai University, Nanjing 210024, China)

**Abstract:** The mild-slope equation is widely applied to the calculation of wave transformation with the computation region being divided into rectangular meshes. While the computation region is divided into irregular quadrilateral, the wave action conservation equation and wave number vector irrotational equation are discretized based on Green's formula, and the eikonal equation is done with deriving partial differential values by transformation of isoparametric element. Thereby the numerical simulation model of wave propagation for waters of slowly varying topography is presented. In the case of different incident wave angles, slope angles of bottom and incident wave heights, the systematic numerical simulation has been made for the straight contour condition and the computation region being divided into irregular quadrilateral, and the calculations show that the results of numerical modeling agree with those of theoretical solution. When the present mathematical model is applied to an example with complicated boundary, the results of numerical solution are basically consistent with those of physical models.

**Key words:** irregular quadrilateral; Green's formula; isoparametric element; numerical simulation