高等学校自然科学学报·电工、无綫电、自动控制版
試刊 第3期 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM SCHOLARUM SUPERIORUM SINENSIUM No.3
1964年11月 Pars Electrotechnica, Radiotechnica et Automatica Nov., 1964

再論直流非綫性电(磁)网絡的普遍解法

王 显 荣
(华南工学院)

摘 要

本文首先从非綫性网絡普遍解法的一般法则[1]出发，提出了直接計算支路电流和支路电压的簡便方法——"直計法"。应用这一方法求解任意复杂非綫性网絡时，只須利用元件的特性曲綫，进行一定次数的数字加减运算，无須对曲綫进行移动、翻轉和叠加，也无須求出元件的参数，因此，可使所得結果具有較大的准确度。

为了使解法所需的試量个数尽量减少，本文接着发展了几年前提出的"突破法"[1]。作者提出了"归一定理"作为理論探討的依据，并提出"曲綫映射"、"多次突破"和"先計后破"等手法，使突破支路的外特性的迅速作出成为可能，并使試量个数减至最少。

探討的結果表明，和其它已知各法比較，"直計法"具有較大的簡便性和准确性；而对于較复杂的网絡来說，"突破法"則具有更大的簡便性。

前 言

非綫性直流电(磁)网絡普遍解法的研究，近年来在国内有了一定的进展。作者前曾提出了普遍解法的一般法則，并初步建議直接以基尔霍夫方程为依据的突破試探图解法[1](以下簡称"突破法")，后有虞厥邦推广了Ионкин的网絡变換法[2]，并提出了試图以多端网絡理論[3]解决非綫性网絡分析問題的初步意見[4]。不久，古孝鴻又发展了Гинзбург的近似增量解析法。这些解法都較以往的有所进步，并且除多端网絡法外，在理論上都具有普遍性，但都缺乏簡便性。因此寻求較佳的解法，仍然是应該努力进行的工作。这首先是因为，在各个电工技术領域中，非綫性元件的应用日漸增多，而所碰到的問題中，不少是屬于直流非綫性网絡的求解問題(例如直流磁路的計算、直流稳压器的設計等等)。其次是因为直流非綫性問題的解法，可应用于交流的非綫性电阻电路中①；例如在多相整流电路(图1)和多級直流

① 为此，只要在时間的若干分点上，把各个电动势在同一时刻的值，看成一組直流电动势的值就可以了。

放大器电路(图 2)中，如果为了求得对应于一定輸入电压的准确响应、不得不顾及每一元件的固有非綫性、或每对元件特性的非絕对对称性时，直流非綫性网絡的解法就可为此提供一条途徑(参閱图 3 和图 4①)。最后，直流非綫性网絡的普遍解法問題，是一个不可忽視的技术基础理論問題，这一問題較好地解决，有助于屬于同一范疇的网絡問題的解决；并且，直流問題的普遍解法是交流問題普遍解法的前驅，因而前者的較好解决，也可能有助于后者的解决。从上述这些观点来看，对于直流非綫性网絡的普遍解法的进一步研究，既有实际意义，又有理論意义。

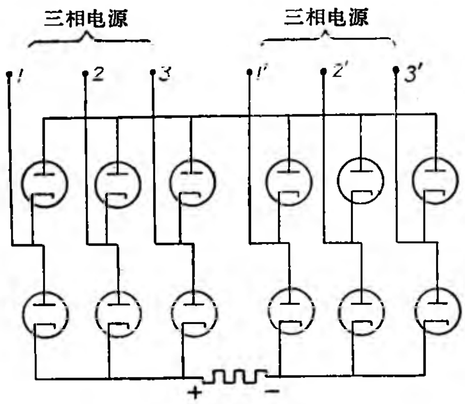

图 1

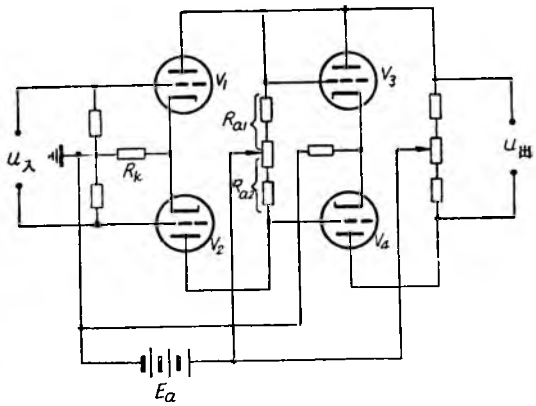

图 2

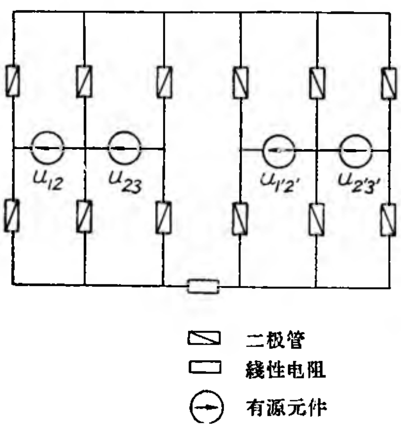

图 3

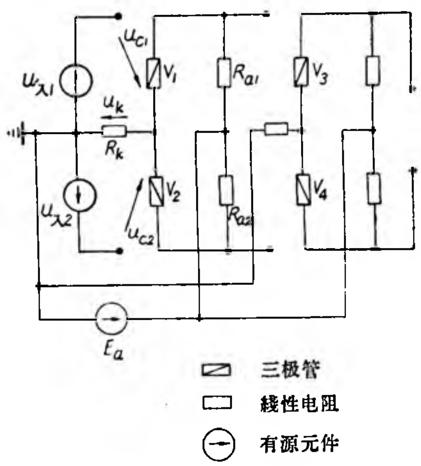

图 4

基于上述的考虑，作者提出一个新的普遍解法——“直計法”，并在这个基础上发展“突破法”，試图使普遍解法問題的解决能够漸趋完善。

① 作为非綫性元件，三极管可看成二极管，只是它的特性曲綫 $u_a(i_a)_{u_c}$ 取决于栅压 u_c 而已。u_c 或为已知，或可作为本文所述解法所需的試量来指定。

一、直計法

(一) 解法原理与举例

本解法是以下述普遍解法的一般法則为依据的:

1. 任一具有 p 个支路，q 个独立节点的网絡，滿足 q 个独立节点方程

$$\Sigma_{(\alpha)} i=0, \qquad (\alpha=1,2,\cdots,q),$$

和 $(p-q)$ 个独立回路方程

$$\Sigma_{(\beta)} u=0, \qquad (\beta=1,2,\cdots,p-q),$$

其中 i 和 u 分别为支路电流和支路电压(图 5)，并且有

$$u=u'-e.$$

其中 u' 为无源元件的电压，而 e 为有源元件的电动势。(在磁路中，i 和 u 分别表示支路磁通和支路磁压，而 e 表示磁通势，以下不另說明。)在求解网絡时，上述 p 个方程必須全部用到。

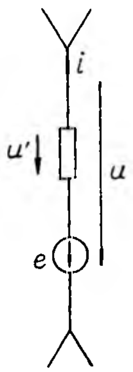

图 5

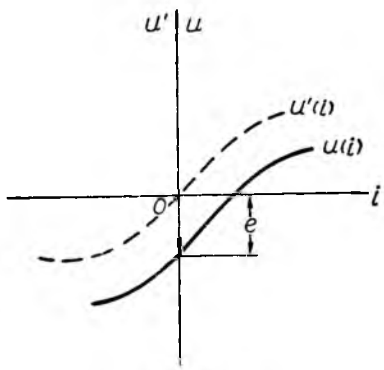

图 6

2. 在各有源元件的电动势 e 和无源元件①的內特性曲綫 $u'(i)$ 或 $i(u')$ 为已知的条件下，所有无源元件的电压和电流，均可根据上述 p 个方程逐一求得[1]。但应指出，若一支路的 e 和曲綫 $u'(i)$ 为已知，則当将支路看成一个等效元件时，該支路的內特性曲綫 $u(i)$ 或 $i(u)$ 也为已知。这是因为我們有 $u(i)=u'(i)-e$，由此可看出曲綫 $u(i)$，可由曲綫 $u'(i)$ 沿 u 軸負向移动一等于 e 的距离得来(图6)，今后为便于計算，我們将采用支路的內特性曲綫 $u(i)$，而不采用无源元件的內特性曲綫 $u'(i)$。

3. 在网絡的求解过程中，假定有 t 个支路的电流 i 或电压 u 为已知或被看作試量(就是說，被假定为某值)，則上述 p 个方程中，有 t 个可暫时弃置不理、而作为檢驗所得結果之用。这就是所謂**檢驗方程**[1]。

① 可以是綫性的，也可以是非綫性的。

4. 根据上述 t 个檢驗方程，可作出 t 个試量的后果曲綫或檢驗曲綫，以决定这 t 个試量的确值[1]。

今后为便于討論起見，在网絡的求解过程中，第一个被据以写出基尔霍夫方程的独立节点或独立回路，将名为起始点路；往后陆續用到的独立节点或独立回路，名为已用点路；而最后据以写出檢驗方程的独立节点或独立回路，则名为檢驗点路。

其次，在网絡求解之前，电压或电流被看作試量的支路，将名为試探支路，而其余的支路，则名为未知支路。当任一支路的电压和电流如有一为已知或被假定，则另一即可根据該支路的內特性曲綫讀出。

明确了这些，我們就很易說明本解法的基本原理和具体步驟。

設图 7 中 α 为网絡的任一个独立节点，其每一綫段各代表一支路，而箭号兼表电压和电流的正向。假定 α 有 p_α 个支路，其中除支路 p_α 外，其余各支路的电流为已知或被指定，则运用基尔霍夫第一定律于此节点，可得如下的节点方程：

$$i_{p_\alpha} = -\sum_{k=1}^{p_\alpha-1} i_k. \tag{1}$$

由此即可求得支路 p_α。今后由某一方程求出的支路，将以符号·标明，而图 7 中，由 α 平行指向 p_α 的箭号，即表由 α 的节点方程，可求出支路 p_α 之意。

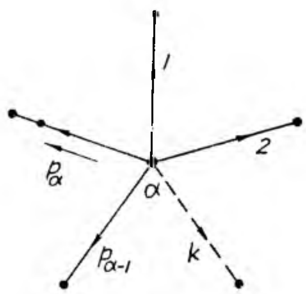

图 7

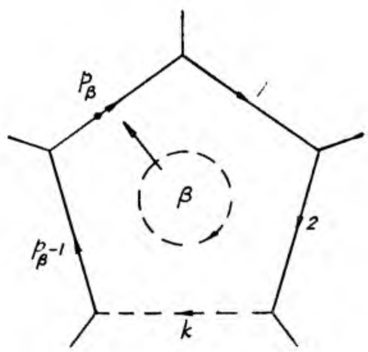

图 8

与此类似，設图 8 中 β 为网絡的任意独立回路，p_β 个支路中除支路 p_β 外，其余各支路的电压俱为已知或被假定，则运用基尔霍夫第二定律于此回路，可得如下的回路方程：

$$u_{p_\beta} = -\sum_{k=1}^{p_\beta-1} u_k. \tag{2}$$

由此即可求得支路 p_β。图 8 中由 β 垂直指向 p_β 的箭号，即表由 β 的回路方程，可求出支路 p_β 之意。

于是假定只要給予网絡的 t 个支路的电流(或电压)以某些試值，便可根据前述普遍解法的法則 3 和 2，輾轉运用上述的 $p-t$ 个独立点路的方程，求出 $p-t$ 个未知支路，則按法

则1和4, t 个試量 $i_1^{\triangle}, i_2^{\triangle}, \cdots, i_t^{\triangle}$ 的确值，便可由剩下的 t 个檢驗点路的下述方程求出:

$$\delta_\gamma(i_1^{\triangle}, i_2^{\triangle}, \cdots, i_t^{\triangle})=0, \qquad (\gamma=1,2,\cdots,t). \tag{3}$$

其中 δ_γ 为第 γ 个檢驗点路的所有支路的电流或电压之和，就是說，

$$\delta_\gamma=\sum_{k=1}^{p_\gamma} i_k \text{ 或 } \delta_\gamma=\sum_{k=1}^{p_\gamma} u_k, \tag{3'}$$

其中 p_γ 为檢驗点路的支路数。

求得了 t 个試量的确值之后，任一支路的电压和电流的确值，便可相继求出了。

从上面可以看出，本解法的原理是不复杂的，解题的步驟說明如下：

設图9所示的网絡中，各支路的內特性曲綫为已知，要求各支路的电流和电压。

为解决这一課題，首先須作出一个网絡求解路徑图，它可以說是网絡求解的方案，并可据以看出試量个数。图的作法如下：先在网絡的外圍或两端①，选取一支路数为最少的点路，例如节点 A，作为起始点路，并以符号◯标明。然后除一个支路外，在起始点路的各个支路上，都标上符号△，以表示它們是試探支路。于是由于起始点路只含有一个未知支路，即可由該点路画一箭号指向这一未知支路，以表明由該点路的方程，可求出該未知支路之意。之后，这一未知支路即当視为已知或已求得的。已求得的支路，用符号・标明。于是再观察毗邻的点路，看有无仅含一个未知支路的。如果有这样的点路，又可从这一点路，画一箭号指向这一未知支路，使成为已被求得的。如果毗邻的点路所含的未知支路均不止一个，则应将其中的某些未知支路改为試探支路，以便在最少数的試探支路的"协助"下，能陆續由各个点路画一箭号至未知支路，直至所有未知支路都变成已被求得的为止。最后选擇一支路数为最大的未用节点(例如图9中的节点 B)，作为非独立节点，并以符号☰标明。剩下的未用点路，便是檢驗点路了。檢驗点路以符号◌标明。这样便完成了网絡求解路徑图的制作(图9)。

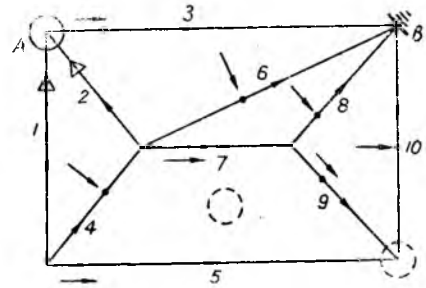

图　9

有了求解路徑图，并在各支路上标上电压和电流的正向之后，便可进行如下的計算:

先令两个試探支路的电流 $i_1^{\triangle}$ 和 $i_2^{\triangle}$ 暂取某值(試值)，然后运用基尔霍夫第一定律于节点 A，以得方程

$$i_3=i_1^{\triangle}+i_2^{\triangle},$$

由此可求得支路3。运用基尔霍夫第二定律于回路 1-2-4，以得方程

$$u_4=u_1^{\triangle}-u_2^{\triangle},$$

① 某些复合网絡的試量个数，与起始点路的选擇有关。把起始点路选在网絡的外圍或两端，可使試量个数为最小。

由此可求得支路 *4*。如是再继續运用定律于独立点路 *1-4-5*，可求得支路 *5*；于 *2-3-6*，可求得支路 *6*；于 *2-4-6-7*，可求得支路 *7*；于 *6-7-8*，可求得支路 *8*；于 *7-8-9*，可求得支路 *9*；于 *8-9-10*，可求得支路 *10*。

求得所有支路后，再运用基尔霍夫定律于两个檢驗点路，可得如下的两个檢驗方程

$$\delta_1(i_1^{\triangle}, i_2^{\triangle})=0, \tag{α}$$

$$\delta_2(i_1^{\triangle}, i_2^{\triangle})=0, \tag{β}$$

其中

$$\delta_1 \equiv \Sigma_{5-9-10}\, i = i_5 + i_9 + i_{10},$$

$$\delta_2 \equiv \Sigma_{5-4-7-9}\, u = u_4 + u_7 + u_9 - u_5.$$

并分别名为第一和第二檢驗函数。它們的值，取决于 $i_1^{\triangle}$ 和 $i_2^{\triangle}$。

于是姑且假定 i_2 的試值 $i_2^{\triangle}$ 是正确的，以便利用方程(α)以檢驗 i_1 的試值 $i_1^{\triangle}$ 是否正确。显然，若 $i_1^{\triangle}$ 也是正确的，則根据 $i_2^{\triangle}$ 和 $i_1^{\triangle}$ 求得的 i_5、i_9 和 i_{10}，必然滿足方程(α)。若不滿足，則說明 i_1 的試值为不正确，必須重行指定，直至方程(α)被滿足为止。为迅速求得一个这样的 i_1 值(暂值)，可根据在一定的 $i_2^{\triangle}$ 值下若干对 $i_1^{\triangle}$ 和 δ_1 的相应值，作出 $i_1^{\triangle}$ 的檢驗曲綫 $\delta_1(i_1^{\triangle})$，其与 $i_1^{\triangle}$ 軸的交点，即給出这样的一个 $i_1^{\triangle}$ 值 $i_1^{\vee}$(图 10)。

于是假定所指定的 $i_2^{\triangle}$ 确实是正确的，則上述求得的 $i_1^{\vee}$ 也是正确的，从而根据它們求出的 i_5、i_9 和 i_{10}，固然滿足方程(α)，而且求出的 u_4、u_7、u_9 和 u_5 也应該滿足方程(β)。如果不滿足，則說明 $i_2^{\triangle}$ 本身为不正确，必須重行指定，直至方程(β)被滿足为止。为迅速求得这样的一个 i_2 值(确值)，可根据若干对 $i_2^{\triangle}$ 和 δ_2 的相应值，作出 $i_2^{\triangle}$ 的檢驗曲綫 $\delta_2(i_2^{\triangle})$，其与 $i_2^{\triangle}$ 軸的交点，即給出这样的一个 $i_2^{\triangle}$ 值 $i_2^{\vee}$，而它就是 i_2 的确值(图 11)。

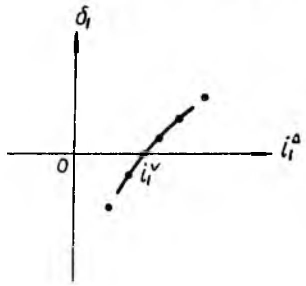

图　10

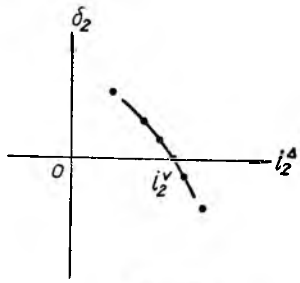

图　11

有了 i_2 的确值以后，即可据以求出 i_1 的确值，从而将問題解决。

今后，根据所指定的所有試量的試值，运用某一方法以求得第一个檢驗函数 δ_1 的一个相应值所需的全部运算，将名为一次网絡試算或一次試算。

（二）　試量个数問題和解法所需的运算

对于任一非綫性网絡的求解，可归結为若干次完全相同的网絡試算。因此，为估計各种精确解法所需的运算，須先解决如下的三个問題：

1. 求解一网絡时，該解法需要几个試量？

2. 試量个数和所需的試算次数之間，有何統計上的关系？

3. 每次試算的具体內容为何？

第一个問題的答案，因网絡的类型、复杂程度、和所用的解法而异，不可能找出一个簡单而普遍的公式，把所有网絡的試量个数都表达出来。这里可以指出的是，一网絡如用本法求解，其試量个数是很容易看出的。为此只要作出一个网絡求解路徑图就行了。利用这一方法，不难看到：具有串并联結构的网絡，不論如何复杂，其試量个数 $t=1$，(有时須将所有并联的支路合并为一等效支路)。簡单棱錐形和棱柱形网絡[2]，不論其平面图的网孔数为何，恒分别有 $t=2$ 和 $t=2$ 至 3，全 N 角形网絡或全 $N-1$ 角形棱錐网絡，其 $t=N-2$；此外如图12、13 和 14 所示的复合网絡，分别有 $t=2$、$t=3$ 和 $t=3$ 等等。

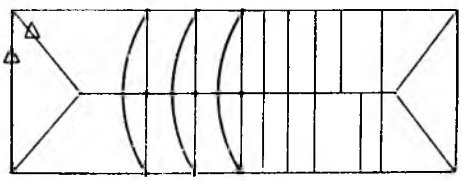

图　12　$t=2$

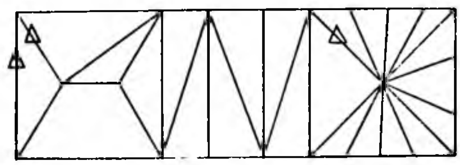

图　13　$t=3$

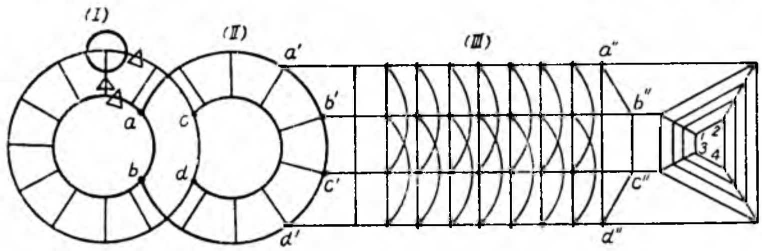

图　14　$t=3$

最后，对于图 4 所示的含有 4 个三极管的网絡来說，其試量个数实际也仅为 1 而已。事实上該网絡可化为如图 15 所示两个独立网絡来求解。对于任一独立网絡，例如第一独立网絡来說，我們以 $u_k^{\triangle}$ 为試量。于是三极管 v_1 和 v_2 的栅压，$u_{c1}=u_{入1}-u_k^{\triangle}$，$u_{c2}=u_{入2}-u_k^{\triangle}$ 便为已知，从而与之等效的非綫性元件的內特性 $u_{a1}(i_{a1})_{u_{c1}}$ 和 $u_{a2}(i_{a2})_{u_{c2}}$ 也为已知。这样，問題便和求解一个具有串并联結构的簡单网絡一样。

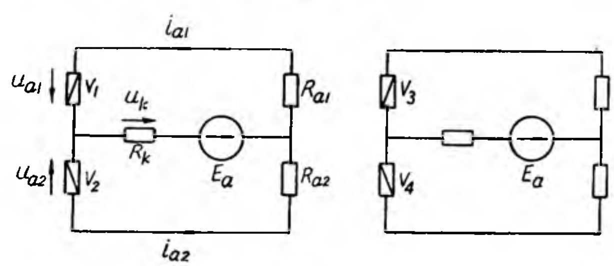

图　15

由此可知，一网絡纵然复杂，用本法求解时其試量个数也是很少的。而且，除全 N 角网絡外，可以下述两种非常广泛方式，无限增加网絡的复杂程度而不增加其試量个数：其一是无限增加网絡各組

成部分的复杂程度，但不要变更其类型和互相联接方式。例如在图 13 所示的网絡上，无論怎样增加其第二部分的三角形数和第三部分的射綫数，只要这些射綫不将两部分的界綫分段，那么試量个数恒可保持为 3。其二是在网絡的 t 个檢驗节点和一个非独立节点上①，接上一个 $N\leqslant t+1$ 端网絡，这个 N 端网絡可以是任意的，但要在端电压和端电流为已知的条件下，不必添設試量就是可以解。例如图 14 所示的复合网絡，就是以 $t=3$ 的簡单棱柱形网絡(I)为基础，按上述方式，陆續添上不同类型的 4 端网絡(II)，(III)和(IV)而成的。这样的网絡扩大，可以无限进行，而始終保持 $t=3$。

第二个問題，就是試量个数和网絡試算次数之間有何統計上的关系？这是所有的精确解法的共同問題，明确了它，就会对这些解法的繁簡程度作一科学的估計。

我們将从具有两个試量的网絡談起，然后推广到一般的情形。現将网絡的求解程序表明如下(其中 i_1 和 i_2 为两个試量，而 δ_1 和 δ_2 为相应的檢驗函数)：

先設 $i_2^\circ=b^{(1)}$。在此前提下，作运算(I)如下：

設 $i_1^\circ=a^{(1)}$，作第 1 次試算，得相应的 $\delta_1^{(1)}$。如 $\delta_1^{(1)}\neq 0$，

再設 $i_1^\circ=a^{(2)}$，作第 2 次試算，得相应的 $\delta_1^{(2)}$。如 $\delta_1^{(2)}\neq 0$，

再設 $i_1^\circ=a^{(m)}$，作第 m 次試算，得相应的 $\delta_1^{(m)}$。

根据上述 m 对 i_1° 和 δ_1 的相应值，作出与 i_1° 軸相交的曲綫 $\delta_1(i_1^\circ)$，則其交点即給出 i_1 的暂值 i_1'。根据此暂值和 $i_2^\circ=b^{(1)}$，再作第($m+1$)次試算，可求得相当的 $\delta_2^{(1)}$。

如 $\delta_2^{(1)}\neq 0$，

再設 $i_2^\circ=b^{(2)}$。重复施行第 2 次运算(I)如上，得相应的 $\delta_2^{(2)}$。如 $\delta_2^{(2)}\neq 0$，

再設 $i_2^\circ=b^{(n)}$。重复施行第 n 次运算(I)如上，得相应的 $\delta_2^{(n)}$。

根据上述 n 对 i_2° 和 δ_2 的相应值，作出与 i_2° 軸相交的曲綫 $\delta_2(i_2^\circ)$，則其交点即給出 i_2 的确值 i_2'。根据此确值，再施行第($n+1$)次运算(I)，可求得 i_1 的确值，并将問題解决

从上述程序可以看出，求解一具有 2 个試量的网絡的試算次数为 $T=(m+1)(n+1)$。但在統計意义上有 $m=n$，故試算次数可表为

$$T=(n+1)^2.$$

推而广之，求解一具有 t 个試量的网絡所需进行的試算次数为

$$T=(n+1)^t, \tag{4}$$

其中 n 为画出檢驗曲綫所需点数。

但应指出，n 的值通常是不大的，因为例如为了决定 i_1 的暂值，只需要曲綫与 i_1° 軸相交的那一小段(图 10)，而我們对于 i_1 各个試值的給定，并非是盲目的，而是朝着使 $\delta_1=0$ 这一目标进行的。因此在給予 i_1 二个試值之后，即可由相应的 δ_1 与零相差的情况，看出 i_1 的下

① 这些节点在网絡內的位置，在一定范圍內可由我們选擇；而在 N 端网絡接上后，它們的方程系用以决定 N 端网絡的端电流，因而就变为非檢驗节点和独立节点了。这时应有的 t 个檢驗节点和一个非独立节点，移至 N 端网絡的某处。注意非独立节点不一定就是零位节点。

一試值应为何，才能使 δ_1 更趋于零。这样，不需要几次試探，i_1 的暫値即可約略看出，并可画出上述小段曲綫。經驗表明，如果元件的內特性曲綫是单調的，則 n 的值平均在4左右①。因而試算次数 T 和試量个数 t 間，可认为存在着下列的統計关系

$$T=5^t. \tag{4'}$$

由此可知，試量个数每增加1，試算次数即增加至为原来的5倍。

最后，第三个問題，可根据本解法所用到的方程(1)和(2)，以及一网絡的未知支路数与独立节点数之間的統計关系，进行分析。結果发現，除全多角形网絡和具有串并联結构的簡单网絡外，一网絡用本法求解时，其每次試算所需的加减运算次数 d 和該网絡的独立节点数 q 或独立回路数 s 間，有如下的統計关系：

$$d \doteq 2q(\text{或 } 2s)+1\cdot n_4+2\cdot n_5+3n_6+\cdots. \tag{5}$$

其中 n_k 可理解为支路数为 $k>3$ 的独立点路的个数。利用这一公式，一网絡的每次試算所需的加减运算次数，可一望而知其梗概。例如对于图9所示的网絡，一望而知其 $d\doteq 12$（实为11），因为該网絡 $s=5$，$n_4=2$，$n_5=0\cdots$。

于是若又知网絡的試量个数 t，則用本法求解該网絡所需的全部加减运算次数，即可由式(4)知为

$$D=5^t d. \tag{6}$$

这就是我們所要寻找的估計公式。

在探討了这些問題之后，看出本法每次試算是比較簡单，因此对一复杂网絡用本法求解时，如其試量个数仅較网絡变换法大1，則两法的簡便性几乎相若；如本法試量个数等于或甚至小于变换法，則本法就較之簡单得很多倍了。第一种情形，仅发生于簡单棱錐形网絡，和本法可以不用的全棱錐形网絡。第二、特别是第三种情形，則大量出現于各式各样的网絡，而且网絡愈复杂，則本法試量个数就小得愈多，例如对于图12所示的网絡，本法的試量个数为2而变换法为11。

二、突破法

(一)　解法要点

如所已知，与“直計法”不同，本法主要是作出突破支路的外特性曲綫，并从其与內特性曲綫的交点，求出突破支路的电压和电流，然后相继求出其他各支路的电压和电流。因此发展本法的关鍵，在于如何根据网絡的結构，迅速作出突破支路的外特性曲綫，并尽量将試量个数减少。

① 这是从高估計的。事实上，在作出了曲綫的三个点之后，若通过这三个点作出一圓滑綫段，則此綫段与横軸的交点的横坐标即已迫近試量的暫値，因此也常有 $n=3$ 的情形。

（二） 突破支路外特性的作出

我們現在来探討如何根据网絡結构，迅速作出突破支路的外特性。为了使問題具体化，我們将以图 16 所示网絡为例。

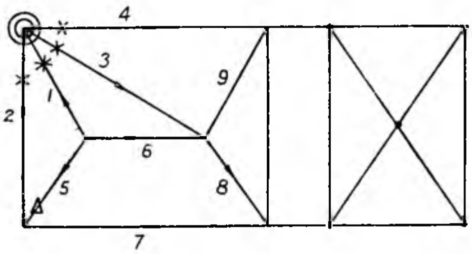

图 16

設任意选定支路 *1* 为突破支路（用符号 * 标明）。为求其外特性曲綫，須先证明一个重要定理，就是在指定网絡的一些支路为必要的試探支路之后，如将这些支路的电压和电流視为常数，則所有其他支路的电压和电流，均可直接或間接地表为支路 *1* 的电压或电流的函数。这一定理，称为**归一定理**。

首先从回路 *2-1-5*$^{\triangle}$ 观察，如指定支路 *5* 为試探支路，并将其电压（从而电流）視为常数，則支路 *2* 的电压显然可通过該回路的方程 $u_2=u_5^{\triangle}-u_1$ 表为 u_1 的函数。由于 i_2 和 u_2，以及 i_1 和 u_1，又分别以支路 *2* 和 *1* 的內特性曲綫互相联系，因此 i_2 或 u_2 都可表为 u_1 或 i_1 的函数。我們将簡称这种情形为“支路 *2* 通过回路 *2-1-5*$^{\triangle}$ 表为 *1* 的函数”。

从图 16 不难看出，支路 *6* 可通过节点 *6-1-5*$^{\triangle}$ 表为 *1* 的函数；支路 *3* 又可通过回路 *3-6-1* 表为 *1* 的函数；支路 *7* 又可通过节点 *7-5*$^{\triangle}$*-2* 輾轉表为 *1* 的函数。如此类推，可证明除試探支路外，所有其他支路均可輾轉表为 *1* 的函数。

試实了上述定理之后，支路 *1* 的外特性的求出，便可按下述方法进行：

先选擇一个含有支路 *1* 的节点或回路，然后写出电流方程 $\Sigma i=0$ 或电压方程 $\Sigma u=0$。这样的独立点路，将名为**外特性点路**，而写出的方程，則名为外特性方程。在本例，若选定节点 *1-2-3-4* 为外特性节点（用箭符号◎标明），則外特性方程为

$$i_1=i_2+i_3+i_4. \tag{7}$$

外特性点路所具的支路，除突破支路外，其余将概称为**协成支路**。在本例，协成支路就是支路 *2*、*3* 和 *4*（用符号 × 标明）。

于是根据归一定理，式(7)各項，都可視为变量 u_1 的函数，从而可写成

$$i_1[u_1]=i_2[u_1]+i_3[u_1]+i_4[u_1].$$

由此可知，突破支路 *1* 的外特性曲綫 $i_1[u_1]$，等于各协成支路与支路 *1* 的流压关系曲綫 $i_2[u_1]$，$i_3[u_1]$，$i_4[u_1]$ 之和①，注意这里的曲綫 $i_1[u_1]$ 与支路的內特性 $i_1(u_1)$ 不同。

这样求突破支路 *1* 的外特性 $i_1[u_1]$ 的問題，可归結为求曲綫 $i_2[u_1]$，$i_3[u_1]$ 和 $i_4[u_1]$ 的問題。

为求曲綫 $i_2[u_1]$，須选擇一既含有支路 *2* 又含有支路 *1* 的独立点路，然后据以写出基尔

① 若外特性方程为一关于电压的方程，則为求突破支路的外特性 $u_1[i_1]$，除試探支路外，各支路的电压和电流都应視为 i_1 的函数。

霍夫方程。这样的独立点路，将称为 2 和 1 的关系点路，而写出的方程，則名为两支路的关系方程。注意此处的外特性点路，已經是一个节点，因此各协成支路与突破支路的关系点路，只能是回路而不可能再是节点。而由图 16 可看出，支路 2 和 1 的关系回路中，以回路 2-5-1 为最簡单，由此可得关系方程为

$$u_2 = u_5^{\wedge} - u_1, \tag{8}$$

或

$$u_2[u_1] = u_5^{\wedge} - u_1[u_1].$$

这一关系表明，若 $u_5^{\wedge}$ 被指定，則关系曲綫 $u_2[u_1]$ 即可由曲綫 $u_1[u_1]$ 的翻轉和移动得来[1]①，而曲綫 $u_1[u_1]$ 显然为斜度等于 1 而通过原点的直綫，因此是已知的。这一特殊曲綫，将称为突破支路的固有直綫，因为它不以任一支路的特性为轉移。

有了曲綫 $u_2[u_1]$ 之后，即可以支路 2 的內特性 $u_2(i_2)$ 为媒介，把曲綫 $u_2[u_1]$ 映射为我們所需要的曲綫 $i_2[u_1]$。为此只要在曲綫 $u_2[u_1]$ 所在的坐标平面 u_2-$[u_1]$ 上(图 17)，画出支路 2 的內特性 $u_2(i_2)$，使其 u_2 軸与原来的 u_2 軸重合，而 (i_2) 軸則与原来的 $[u_1]$ 軸重合。于是对应于同一纵坐标 $u_2=\overline{OM}$，即可由曲綫 $u_2[u_1]$ 和 $u_2(i_2)$ 求得两个相应的横坐标 $u_1=\overline{M1}$ 和 $i_2=\overline{M2}$，从而以 u_1 为横坐标、i_2 为纵坐标的点 $1'$，就是所求曲綫 $i_2[u_1]$ 的一个点。曲綫 $i_2[u_1]$ 的 i_2 軸，可令与原来的 u_2 軸重合(图 17)。

我們現在进而討論协成支路 3 对 1 的曲綫 $i_3[u_1]$ 如何求出的問題。与前面所說的一样，为求这一曲綫，須先在图中找出支路 3 和 1 的关系回路。从图 16 可看出，3 和 1 的关系回路中，以回路 3-6-1 为最簡单，由此可得关系方程为

$$u_3 = u_6 - u_1, \tag{9}$$

从而根据归一定理有

$$u_3[u_1] = u_6[u_1] - u_1[u_1].$$

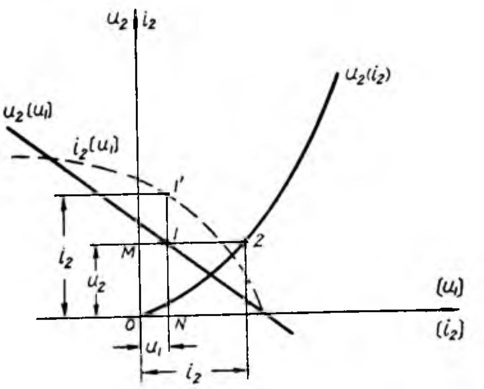

图 17

这一关系表明，支路 3 对 1 的曲綫，等于支路 6 对 1 的曲綫与支路 1 的固有直綫之差。

为求 6 对 1 的曲綫 $u_6[u_1]$，可先求其共軛曲綫 $i_6[u_1]$，后者可由节点 6-5-1 的方程

$$i_6 = i_5^{\wedge} + i_1 \tag{10}$$

或

$$i_6[u_1] = i_5^{\wedge} + i_1(u_1)$$

由支路 1 的內特性 $i_1(u_1)$ 的移动得来。这里 $i_5^{\wedge}$ 是对应于 $u_5^{\wedge}$ 的常数。

求出了支路 6 对 1 的曲綫之后，我們所需要的协成支路 3 对 1 的曲綫便可按式(9)求出了。这种为了求出某一协成支路的曲綫，而其曲綫不得不先行求出的支路 6，将与协成支路一起，合称为外特性的参与支路。而据以写出方程，从而求出各参与支路的曲綫的点路，則

① 当然，曲綫 $u_2[u_1]$ 也可直接由方程(2)作出，它显然为一斜率等于 -1 而纵截距为 $u_5^{\wedge}$ 的直綫。

称为外特性的参与点路。

最后我們来看协成支路 *4* 对 *1* 的曲綫 $i_4[u_1]$ 又是如何求出的。从图 16 可知，支路 *4* 和 *1* 的最簡单的关系回路为 *4-9-6-1*，因而关系方程为

$$u_4 = u_9 + u_6 - u_1.$$

但鉴于 $u_6 - u_1 = u_3$，上式又可写为

$$u_4 = u_9 + u_3. \tag{11}$$

由此可知，支路 *4* 对 *1* 的曲綫，等于支路 *9* 和 *3* 对 *1* 的曲綫之和。

支路 *3* 对 *1* 的曲綫，前面已經求出了，問題在于如何求出支路 *9* 对 *1* 的曲綫。

从图 16 观察，要直接求出支路 *9* 对 *1* 的曲綫是有困难的，只好采取迂廻的方法，先从节点 *7-5-2* 的方程，求出支路 *7* 的曲綫，再从回路 *8-7-5-6* 的方程，求出支路 *8* 的曲綫，最后便可由节点 *9-8-6-3* 的方程，求出支路 *9* 的曲綫了。

于是我們所需要的曲綫 $i_4[u_1]$，便可按式(11)求出了。

求出了所有的协成支路的曲綫之后，突破支路的外特性便可按式(7)求出了。

回顾上面所論，我們发现，求突破支路的外特性的問題，可归結为在突破支路所在的点路上，設置必要的試探支路之后，依次写出各个参与点路的方程，并根据归一定理化为相应曲綫的关系方程，从而求出各个参与支路的曲綫的問題。

为使上述工作易于进行，事先应該作出外特性求解路徑图，图的作法如下：

先在网絡两端或外圍，选一支路为最多的点路[①]，(例如图 18 中的节点 *1-2-3-4* 或回路 *5-6-7-8*，而不是节点 *3-9-8-6* 或节点 *4-9-10-11*)作为外特性点路，并以符号◎标明。然后在外特性点路的支路中，选其一为突破支路，其余均为协成支路，并分别以符号 * 和 × 标明。但突破支路，应是一些支路数較小的点路的公有支路[①](例如图 19 中的支路 *1*，而不是支路 *3* 或 *4*)。于是即可由外特性点路，画一箭号指向突破支路(即与支路平行或垂直，視外特性点路是一节点或一回路而定，以下同)，以表明由外特性点路的方程，可求出突破支路的外特性之意。此外，再在突破支路上标上符号：，以表明它是已知支路(即它的固有直綫为已知)。继而在外特性点路的毗邻点路中，选一支路为最少的点路(例如图 18 中的回路 *1-2-3*)作为第一个参与点路，并在其上指定必要的試探支路，使該点路仅含一个未知支路(即它的曲綫为未知)。于是又可从該点路画一箭号指向这一未知支路，以表明由該点路的方程，可求出这一未知支路的曲綫之意。如是之后，这一未知支路即应視为已求的。已求的支路，也用符号：标明。再后又在毗邻的点路中，看有无仅含一个未知支路

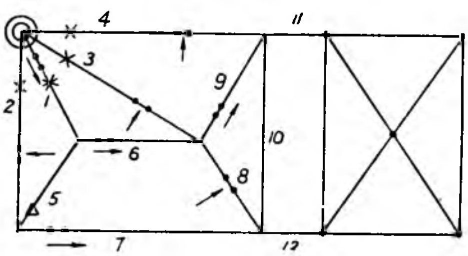

图 18

① 有些网絡，其試量个数和参与支路数都与外特性点路和突破支路的选擇有关。經驗表明，按照所述方法来选定外特性点路和突破支路，可使試量个数和参与支路数成为最小。

的，若然，又可同样处理。如是继續，直至所有的协成支路都变成已求支路为止。

在图的制作过程中，如果发現某一点路含有不止一个未知支路，而这些多出的未知支路又不可能由其他的点路求出时，这些多出的未知支路应改为試探支路，总以使能在最少的試探支路的帮助下，根据每一参与点路的方程，求出每一参与支路的曲綫为准則。根据这一准則，外特性求解路徑图可迅速作成，如图18所示。

在图19中，我們还画出了由各个非参与点路指向各个非参与支路的箭号，以表明由該点路的方程可以求出該支路之意。同时为便于和已求的参与支路互相区别，已求的非参与支路，用符号・标明。注意为求出所有的非参与支路，还須再行指定支路 *14* 为試探支路。为此目的而設的試探支路，将名为**补充試探支路**，幷同样以符号△标明。此外在图19中，我們还用規定符号标出了一个非独立节点和所有的檢驗点路。这样的完整图形，将名为**网絡求解路徑图**。网絡求解路徑图是求解整个网絡的方案和指南，幷可据以看出全部試量个数。

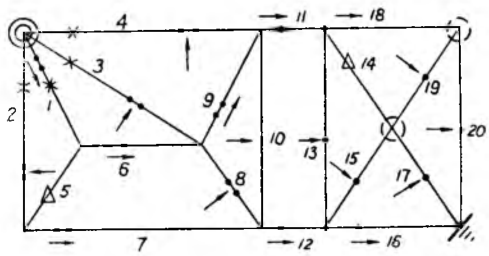

图19　$t'=2$

(三)試量个数問題，多次突破和先計后破

明确了突破支路的外特性如何作出，特别是网絡求解路徑图如何作出之后，試量个数如何决定的問題，实际是已經解决的了。

运用前述网絡求解图的正确作出方法，我們发現，若一网絡用本法求解时所需試量个数为 t'，用直計法求解时所需試量个数为 t，则除图20、21所示等类型有 $t'=t$ 之外，对于其他所有試过的网絡，都有 $t'=t-1$。

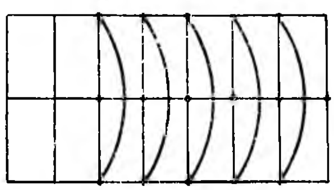

图20　$t=t'=2$

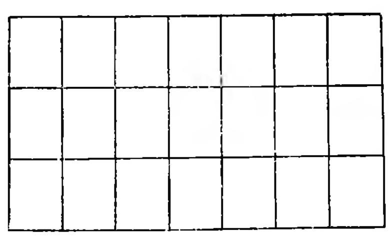

图21　$t=t'=3$

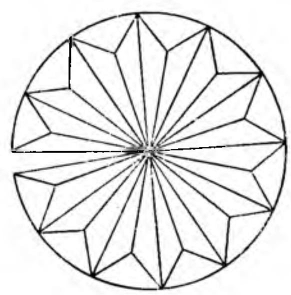

图22　$t'=1\ll t$

試量个数的减少，意味着求解网絡时所需进行的試算次数的大量减少。根据这一理由，总的說来，本法远較其他各法方便。但是否就較直計法方便，則須視具体情况而定。显然，就每次試算而論，本法是远較直計法繁复的，因为后者仅須进行一些数字的簡单加减运算，而本法則須画出許多参与支路的曲綫。因此对于試量个数相同的网絡，突破法不如直計法。

然而对于具有补充試探支路的复合网絡来說，可以将某些补充試探支路(例如图 19 的支路 *14*)，或其邻近的某些支路，改为第二突破支路，然后又将其后的补充試探支路改为第三突破支路，如此等等。每改一个这样的支路为突破支路，試量个数便减少一个。于是突破法所需的試量个数不只較直計法少 1。对于这样的网絡，突破法就大大便于直計法了。

采用这种“多次突破法”，其試量个数往往是很少的。例如图 22、23 所示网絡，其試量个数仅为 1；图 24 为 2。

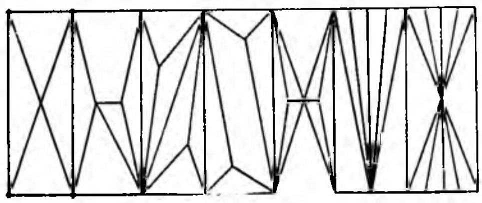

图 23　$t'=1\ll t$

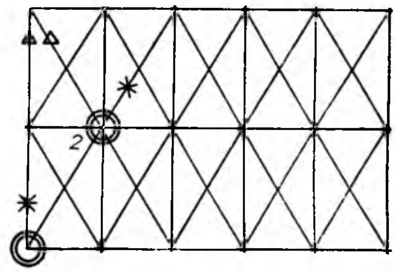

图 24　$t'=2\ll t$

其次，对于所有 $t'\geqslant 2$ 的网絡来說，設法进一步簡化本法的每次試算，也常常是可能的。为此只要先对网絡施行直計法，即在网絡的外端，先选擇一支路数为最小的点路（例如图 25 中的节点 1-2-3）作为起始点路，然后从此点路开始，依次根据每一独立点路的方程求出各个支路(例如图 25 中的支路 *3, 4, 5*)，直至如果不添設試探支路，即无法再行求出为止。此时才开始改用突破法，也就是說，再选定某一支路数为最多的独立点路为外特性点路(例如图 25 中的回路 *6-7-11-16*)，然后根据每一参与点路的方程，求出各个参与支路的曲綫。利用这种“先計后破”的办法，参与支路数可减至最少，从而每次試算的劳动量也可减至最少。例如以图 25 所示网絡来說，其参与支路数可由 15 减至 11。

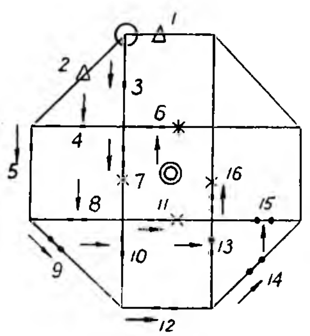

图 25　$t'=2$

对于某些网絡，“先計后破法”有时还可以减少試量个数。例如对图 21 所示网絡施行这一方法，其試量个数可由 3 减至 2。

采用“先計后破”和“多次突破”法，使任意复杂的非綫性网絡的求解不仅可能，而且可以簡化。

参 考 文 献

[1] 王显荣，物理学报，第 15 卷，第 3 期，1959 年。

[2] 虞厥邦，物理学报，第 15 卷，第 11 期，1959 年。

[3] Зелях, Э. В.，陆志刚等譯，綫性网絡原理，第四章，1951 年。

[4] 虞厥邦，物理学报，第 17 卷，第 11 期，1961 年。

ON THE GENERAL METHODS FOR SOLVING D. C. NON-LINEAR ELECTRIC AND MAGNETIC CIRCUITS

Wang Hsien-jung

(South China Polytechnic Institute)

Abstract

In the first part of this paper, a new general method is suggested by which one can solve any complicated non-linear electric or magnetic circuit of direct current with straightforward computations without transforming the network or finding the external characteristic curve of the penetrating branch. The neccessary calculations performed are simply additions and subtractions and the result obtained is seen to be the most accurate.

In the second part of the paper the penetration method for solving non-linear networks, suggested a few years ago, is further developed. In virtue of a network theory and by means of some suitable techniques, the construction of the external characteristic curve is made easy, and the number of starting quantities neccessary for solving a network is reduced to a minimum. This renders the penetration method the simplest one of the known.