

# 基于系统误差及其协方差矩阵拟合的抗差自适应滤波

张双成<sup>1</sup>, 高为广<sup>2</sup>

(1. 长安大学 地质工程与测绘工程学院, 陕西 西安 710054; 2. 中国人民解放军信息工程大学 测绘学院, 河南 郑州 450052)

**[摘要]** 动态导航数据处理中基于系统误差及其协方差矩阵拟合的自适应滤波算法在一定程度上可以抵制系统误差或区域性系统误差对动态导航定位结果的影响, 但无法抵制异常扰动的干扰。考虑到观测模型和动力学模型存在异常扰动时, 整体控制状态噪声协方差阵的方法可以减弱扰动异常的影响, 因此提出一种基于系统误差及其协方差矩阵拟合的抗差自适应滤波算法。算例结果证实, 该算法在减弱系统误差影响的同时, 还能有效地抵制观测异常和载体状态扰动异常对动态系统参数估值的影响。

**[关键词]** 系统误差; 协方差矩阵; 抗差估计; 自适应滤波; 全球定位系统

**[中图分类号]** P228.4 **[文献标识码]** A **[文章编号]** 1672-6561(2005)02-0060-03

**[作者简介]** 张双成(1979—), 男, 山西长治人, 硕士研究生, 从事动态导航的数据处理与质量控制研究。

在诸多动态导航数据处理方法中, 动态导航数据的实时处理或事后处理经常采用动态 Kalman 滤波技术, 将真正的信号或状态从含有各种随机干扰的观测信息中实时最优地估计出来。这一状态估计过程经常假设系统的动态噪声和观测噪声统计特性为已知的零均值白噪声或高斯白噪声序列, 但在实时动态导航定位过程中, 偏离理想假设的观测向量或偏离理想假设的动力学模型必然会给动态导航结果带来偏差, 甚至使 Kalman 滤波发散。尽管有学者提出一些算法来减弱系统偏差的影响, 但是在实践中如何估计这种观测偏差和模型偏差还是有困难的。对此杨元喜提出一种对观测系统差和动力学模型差的直接拟合法, 并给出相应协方差矩阵的近似估计方法<sup>[1]</sup>。但是在动态系统出现异常扰动情况下, 上述算法却不能有效地抵制异常扰动对导航解的影响。考虑到整体控制状态噪声协方差阵的方法可以从一定程度上减弱扰动异常的影响<sup>[2]</sup>, 笔者试图提出一种基于系统误差及其协方差矩阵拟合的抗差自适应滤波, 即在减弱系统误差的同时, 也能有效地抵制异常扰动对导航解的影响。

## 1 基于系统误差及其协方差矩阵拟合算法

设动态载体的函数模型为<sup>[3]</sup>

$$X_k = \Phi_{k,k-1} X_{k-1} + w_k \quad (1)$$

$$L_k = A_k X_k + e_k \quad (2)$$

式中:  $X_k$  为  $t_k$  时刻状态向量;  $\Phi_{k,k-1}$  为状态转移矩阵;  $w_k$  为动力模型噪声向量;  $L_k$  为观测向量;  $A_k$  为设计矩阵;  $e_k$  为观测误差向量;  $w_k$  和  $e_k$  的协方差矩阵分别为  $\Sigma_{w_k}$  和  $\Sigma_{e_k}$ 。

滤波过程中经常假定  $w_k$  和  $e_k$  为零均值白噪声且互不相关<sup>[6~8]</sup>, 但实际应用中这个条件很难满足, 即观测模型和动力模型误差期望值可能不为零, 即

$$E(e_k) = u_k, E[(e_k - u_k)(e_k - u_k)^T] = \Sigma_{e_k} \quad (3)$$

$$E(w_k) = s_k, E[(w_k - s_k)(w_k - s_k)^T] = \Sigma_{w_k} \quad (4)$$

根据式(3)和式(4), 若忽略观测系统差和动力模型系统差, 所求得的状态参数估值必然有偏差。若在固定的观测历元间视系统误差为常量, 或围绕某常量随机变化, 则可以采用固定窗口内的观测残差和状态预测残差向量的均值进行拟合解算<sup>[6~10]</sup>。在此直接写出拟合出的观测模型系统差<sup>[1]</sup>  $\hat{u}_k$  和动力模型系统差  $\hat{s}_k$ , 以及观测向量和预测状态向量的协方差矩阵  $\hat{\Sigma}_{L_k}$  和  $\hat{\Sigma}_{X_k}$ , 推导过程见文献<sup>[1]</sup>。

[收稿日期] 2004-06-30

[基金项目] 国家杰出青年基金项目(40274002)

$$\hat{u}_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (A_{k-i} \hat{X}_{k-i} - L_{k-i}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_{k-i} \quad (5)$$

$$\hat{\Sigma}_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N A_{k-i} \Sigma_{\hat{X}_{k-i}} A_{k-i}^T + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (v_{k-i} - \hat{u}_k)(v_{k-i} - \hat{u}_k)^T \quad (6)$$

$$\hat{s}_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{X}_{k-i} - \Phi_{k-i, k-i-1} \hat{X}_{k-i-1}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_{\hat{X}_{k-i}} \quad (7)$$

$$\hat{\Sigma}_{\hat{X}_k} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_{\hat{X}_{k-i}} v_{\hat{X}_{k-i}}^T + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Sigma_{\hat{X}_{k-i}} = \hat{\Sigma}_{v_{\hat{X}_k}} + \hat{\Sigma}_{\hat{X}_k} \quad (8)$$

式(5) ~ 式(8)中  $N$  为移动窗口长度;  $v_{k-i} = A_{k-i} \hat{X}_{k-i} - L_{k-i}$  为  $L_{k-i}$  的观测残差向量;  $v_{\hat{X}_{k-i}} = \hat{X}_{k-i} - \bar{X}_{k-i}$  为状态预测残差向量;  $v_{\hat{X}_{k-i}} = \hat{X}_{k-i} - \bar{X}_{k-i} - \hat{s}_k$  为经系统偏差修正后的状态预测残差向量。

拟合出观测模型系统差  $\hat{u}_k$  和动力模型系统差  $\hat{s}_k$ , 以及观测向量和预测状态向量的协方差矩阵  $\hat{\Sigma}_k$  和  $\hat{\Sigma}_{\hat{X}_k}$  后, 可将  $\hat{u}_k$  和  $\hat{s}_k$  代入观测方程和状态预测方程, 并利用所求得的  $\hat{\Sigma}_k$  和  $\hat{\Sigma}_{\hat{X}_k}$  即可进行 Kalman 滤波。

## 2 抗差自适应滤波

由上述分析可知, 状态向量预报值  $\bar{X}_k$  的协方差矩阵  $\Sigma_{\bar{X}_k}$  是用它的近似值代替。导航解算过程中, 这种近似替代只有在动态载体处于平稳状态下才相对可靠。但当载体在运动过程中出现较大扰动时, 利用式(8)的近似值求得的  $\Sigma_{\bar{X}_k}$  有较大的偏差<sup>[4]</sup>。若数据处理模型不考虑这些异常扰动的特性, 则动态模型参数估值及其所提供的动态信息将不可靠。为此引入整体控制状态噪声协方差阵的方法<sup>[5]</sup>, 即若状态预报值  $\bar{X}_k$  与拟合滤波值  $\hat{X}_k$  相差较大时, 则可将拟合预测状态向量的协方差矩阵  $\hat{\Sigma}_{\bar{X}_k}$  变换成  $\hat{\Sigma}_{\bar{X}_k} / \alpha$  (其中  $\alpha \leq 1$ ,  $\alpha$  为自适应因子)。由于状态预测残差向量能较好的反映异常扰动, 故构造的自适应因子  $\alpha$  是基于预测残差向量<sup>[6]</sup> 确定出来的。

$$\alpha = \begin{cases} 1 & |\tilde{V}_k| \leq c \\ \frac{c}{|\tilde{V}_k|} & |\tilde{V}_k| > c \end{cases} \quad (10)$$

这里  $c = 2.5$ ,  $\tilde{V}_k = C \|\bar{V}_k\| / \sqrt{\text{tr}(\Sigma_{\bar{V}_k})}$  (11)  
式中:  $\bar{V}_k$  为信息向量,  $\bar{V}_k = \bar{L}_k - L_k = A_k \bar{X}_k - L_k$ 。

## 3 算例比较与分析

利用 MATLAB 模拟数据来分析基于系统误差及协方差矩阵拟合抗差自适应滤波。设载体在沿直线作匀速运动, 其运动方程为:  $s = 12t + 1/2at^2$ , 其中  $t$  为时间,  $s$  为沿直线的位移量, 加速度扰动满足  $a \sim N(0, 0.2)$ , 该模型状态向量取为  $X = (s, \dot{s})$ 。观测系统对直线上的位移进行采样, 采样间隔为 1 s, 观测值取  $L = s + v$ , 观测噪声满足  $v \sim N(0, 3)$ ; 初始观测值方差为  $\Sigma_0 = 3$ , 初始系统噪声矩阵为  $\Sigma_w = 1/3Q_2 \Delta t^3$ , 其中  $\Delta t$  为采样间隔,  $Q_2$  为速度谱密度取经验值为  $0.2 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ 。滤波模型采用常速度模型, 位置和速度初始方差分别取经验值  $0.2 \text{ m}^2$  和  $9.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ 。该算例中利用 Matlab 模拟 3 000 个历元观测值, 在历元数为 480 和 2 400 左右的位置分别对速度加入一异常扰动的同时, 再在 1 500 ~ 2 000 历元间加入一常量系统误差, 然后对上述模拟数据采用 3 个计算方案:

方案 1: 经典 Kalman 滤波(图 1)。

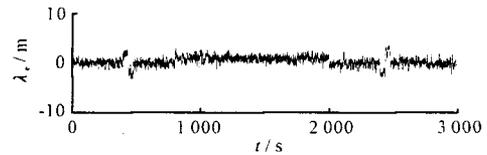


图 1 经典 Kalman 滤波

Fig. 1 Classical kalman filter

方案 2: 基于系统误差及其协方差矩阵拟合的自适应滤波(图 2)。

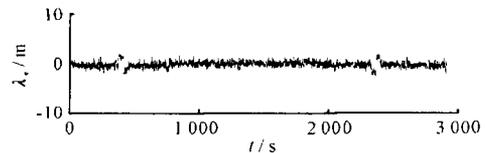


图 2 系统误差及其协方差矩阵拟合的自适应滤波

Fig. 2 Adaptively filter based on fitting systematic errors and covariance matrices

方案 3: 基于系统误差及其协方差矩阵拟合的抗差自适应滤波(图 3)。

在方案(2)~(3)中, 开窗宽度  $N$  取 10 个历元。计算结果见图 1~图 3。各滤波输出量统计如表 1。

通过对算例图表的分析可以得出:

(1)由图 1 可知, 载体在整个运动过程中有两处显著的扰动异常。同时, 由于加入系统误差的原因, 导致滤波结果产生偏移。这两处大的扰动和系统误差对经典 Kalman 滤波解有明显的影

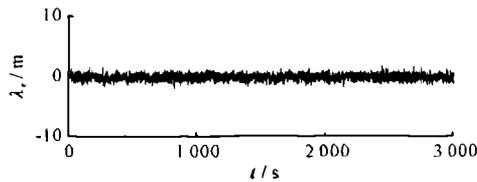


图 3 基于系统误差及其协方差矩阵拟合的抗差自适应滤波

Fig. 3 Adaptively robust filter based on fitting systematic errors and covariance matrices

表 1 各种滤波输出误差统计结果

Table 1 Error statistics and standard deviations of the filtering outputs

方案	误差均值/m	均方误差/m	误差最大值/m
1	0.156	0.646	2.328
2	0.105	0.543	2.290
3	0.048	0.466	1.649

(2) 基于系统误差及其协方差矩阵拟合的自适应滤波在一定程度上能抵制系统误差对导航解的影响,其结果约优于经典 Kalman 滤波,但有较大的异常扰动出现时,因异常扰动持续时间较短,该算法拟合偏差较大,故不能很好地控制异常扰动的影响。

(3) 基于系统误差及其协方差矩阵拟合的抗差自适应滤波解不仅有效地抵制了系统误差的影响,而且也减弱了异常扰动对参数估值的影响,其结果明显优于经典的 Kalman 滤波和基于系统误差及其协方差矩阵拟合的自适应滤波。

## 4 结论

经典 Kalman 滤波器是满足理想条件下的一种

最优状态估计算法,但实际应用中,当有系统误差和扰动异常出现时,滤波结果差,甚至会出现发散现象。基于系统误差及协方差矩阵拟合的自适应滤波利用移动窗口拟合得到的系统误差对模型进行修正,则可在很大程度上减弱系统误差影响,然而抵制动态载体扰动异常的效果并不明显。基于系统误差及协方差矩阵拟合的抗差自适应滤波在减弱系统误差影响的同时,在整体上控制了状态噪声协方差阵,从一定程度上改善了异常扰动对导航解的影响。

## [ 参 考 文 献 ]

- [1] 杨元喜,张双成. 导航解算中的系统误差及其方差协方差矩阵拟合[J]. 测绘学报, 2004, 33(3): 189~194.
- [2] Yang Y, Xu T. An adaptive kalman filter based on sage windowing weights and variance components [J]. Journal of Navigation, 2003, 56(2): 231~240.
- [3] 付梦印,邓志红,张继伟. Kalman 滤波理论及其在导航系统中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 2003.
- [4] 杨元喜,何海波,徐天河. 论动态自适应滤波[J]. 测绘学报, 2001, 30(4): 293~298.
- [5] Yang Y, He H, Xu G. Adaptively robust filtering for kinematic geodetic positioning [J]. Journal of Geodesy, 2001, 75: 109~116.
- [6] 李曙光. GPS 车辆导航系统研究[D]. 西安: 长安大学(原西安公路交通大学), 2000.
- [7] 徐天河,杨元喜. 改进的 Sage 自适应滤波方法[J]. 测绘科学, 2000, 25(3): 22~24.
- [8] 张勤. 非线性最小二乘理论及其在 GPS 定位中应用研究[D]. 武汉: 武汉大学, 2002.
- [9] 张永志. 应用 GPS 观测研究青藏高原东北缘应力场变化[J]. 长安大学学报(地球科学版), 2003, 25(4): 80~84.
- [10] 王腾军. GPS 观测数据格式转换研究[J]. 西安工程学院学报, 2000, 22(3): 53~55.

## Adaptively robust filter based on synthetically fitting systematic errors and covariance matrices

ZHANG Shuang-cheng<sup>1</sup>, GAO Wei-guang<sup>2</sup>

(1. School of Geological Engineering and Surveying Engineering, Chang'an University, Xi'an 710054, China;

2. School of Surveying and Mapping, Information Engineering University, Zhengzhou 450052, China)

**Abstract:** Adaptive filter combined with synthetically estimating systematic errors and covariance matrices of systematic error can be used to resist the effect that is induced by the systematic errors or area systematic errors during the data of dynamic navigation is processed, but it is difficult to control the abnormal disturbance. The influence of the abnormal disturbance can be reduced by the adjusting the covariance matrix of state noises when the observation model and dynamics model exist abnormal disturbance, so an arithmetic of adaptive robust filter is developed in this research. The results of simulated calculation show that the adaptive robust filter that is developed in this research not only can reduce the influence of the systematic errors, but also can resist the influence that induced by abnormal disturbance.

**Key words:** systematic errors; covariance matrices; robust estimation; adaptively filter; GPS

[英文审定: 马智民]