

无矩阵迭代法在膜结构风振耦合分析中的应用*

孙芳锦¹, 殷志祥², 张大明³

(1. 辽宁工程技术大学土木建筑工程学院, 辽宁 阜新 123000; 2. 辽宁工程技术大学研究生学院, 辽宁 阜新 123000;
3. 辽宁工程技术大学技术与经济学院, 辽宁 阜新 123000)

摘要: 提出在采用浸入物体法(IOM)对膜结构和空气流体建模时,可以采用带有预定条件的无矩阵 Newton-Krylov 迭代算法求解浸入物体法,并引入了预定条件矩阵。将提出的无矩阵迭代方法应用于一双坡型膜结构的风振耦合分析中,得出了结构的风压和风速分布,并对带有预定条件和不带预定条件的无矩阵迭代算法进行了对比。结果表明,将带有预定条件的无矩阵迭代算法应用于膜结构风振的耦合分析中,可以得到准确结果,并使计算效率大大提高。

关键词: 无矩阵 Newton-Krylov 迭代法;浸入物体法(IOM);膜结构;风致振动;耦合效应
中图分类号: TU973+.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 1672-2132(2010)02-0212-04

0 引言

膜结构柔性大、非线性强,其控制荷载是风荷载。当膜结构产生风致振动时,会产生明显的空气流体和结构相耦合的现象,即流固耦合效应。在过去的十几年里,各国学者对流体-固体耦合计算问题作了大量的研究,并发展了一些新的计算方法^[1,2]。Peskun 首先提出的浸入边界法^[3,4](IB)就是其中之一,它是将与流体具有同样密度的浸入弹性体(纤维)看成是 Navier-Stokes 方程中的一系列等价体来建模的。同时,许多学者也对浸入结构形状、质量、柔性进行了大量的研究^[5,6],因此近几年浸入边界法已经被成功地应用于不同的领域^[7]。这种在浸入边界法中引入虚拟域的方法,通常被称为浸入物体法(IOM)。对浸入物体法进行求解时,一般需要计算 Jacobian 矩阵,浸入物体法中的 Jacobian 矩阵的存储量要求在 n^2 数量级上,而对于有上百万个自由度的大型体系来说, Jacobian 矩阵需要 10^{12} 的存储量,这远远超出了一般计算机的容量。

目前对于采用浸入物体法研究膜结构风致振动中的流固耦合效应,国内外尚处于发展阶段,而对于采用带有预定条件的无矩阵迭代法求解浸入物体法

建立的膜结构和空气形成的流固耦合体系模型的研究还少见报道,在建模和求解过程中还有很多问题需要进一步研究。

本文给出了采用浸入物体法(IOM)的膜结构和空气流体的有限元方程,提出采用带有预定条件的无矩阵 Newton-Krylov 迭代算法求解浸入物体法,该方法可以避免计算 Jacobian 矩阵,并引入预定条件矩阵。同时,将提出的方法应用于一双坡型膜结构的风振耦合分析中,得到了比较满意的结果。

1 浸入物体法

考虑典型的流固系统,浸入变形体的固体域为 $\Omega_s(t)$ 。为解决流体域不断变化的问题,这里引入虚拟域,即引入对于固体域 $\Omega_s(t)$ 来说占据同样空间域的人造流体域。流固耦合系统的主要未知量是流体速度 v 、流体压力 p 以及固体压力 p^s 。

定义 Sobolev 空间,那么控制方程的弱形式可以定义为

$$\int_{\Omega^h} w_{,i} N_i^v \rho v_i^h d\Omega - \int_{\Gamma_i^h} w_{,i} N_i^v f_i^{T^h} d\Gamma + \int_{\Omega^h} (w_{,i} N_{i,j}^v \tau_{ij} - p^h w_{,i} N_{i,i}^v) d\Omega +$$

* 收稿日期:2009-09-04;修回日期:2009-10-30
基金项目:辽宁省教育厅基金项目(202183391)、辽宁工程技术大学优秀青年科学研究基金项目(09236)、辽宁工程技术大学博士科研启动基金项目(09-139)资助
作者简介:孙芳锦(1981-),女,讲师,博士。主要从事大跨度结构的抗风研究。Email:e_dm@163.com

$$\int_{\Omega_s^h} [w_{i,j}^s N_j^v (\rho_s - \rho) (\dot{v}_i^h - g_i) + w_{i,j}^s N_j^v (\sigma_{ij}^s - \sigma_{ij}^f)] d\Omega - \int_{\Omega^h} w_{iI} N_I^v \rho g_i d\Omega + \int_{\Omega^h} q_I N_I^p \left(v_{i,j}^h + \frac{p^{s,h}}{\kappa} \right) d\Omega + \int_{\Omega^h} q_J^s N_J^p \left(J_{3-1} + \frac{p^{s,h}}{\kappa} \right) d\Omega = 0 \quad (1)$$

式中 N_I^v 和 N_I^p 分别为节点 I 的速度向量和压力的内插函数;

v_I, w_I, p_I, q_I 分别为离散速度向量的节点值;

N_J^v 和 N_J^p 分别为节点 J 的唯一向量和未知压力;

$w^{s,h}, p^{s,h}, q^{s,h}$ 分别为离散位移向量的节点值;

ρ 为流体压力;

τ_{ij} 为剪应力;

f_i^h 为作用在流体域上的外力;

p_s 为固体压力;

σ_{ij}^s 和 σ_{ij}^f 分别为固体域和流体域的 Cauchy 应力;

\dot{v}_i^h 为 I 点的加速度;

g_i 为重力加速度;

κ^s 为固体体积模量;

J_3 为变形斜率的行列式。

2 无矩阵 Newton-Krylov 迭代算法

本文提出采用预定条件技术无矩阵 Newton-Krylov 迭代算法来求解以上的浸入物体法。在无矩阵 Newton-Krylov 迭代算法中,无需形成 Jacobian 矩阵^[8,9]。无矩阵 Newton-Krylov 迭代法中,最重要的一步就是用有限差分计算代替 $w = Jq_i$,

$$Jq_i \cong \frac{r(\Theta^{m+1,k-1} + eq_i) - r\Theta^{m+1,k-1}}{e} \quad (2)$$

式中 J 为 Jacobian 矩阵;

q_i 为 n 维 Krylov 子空间向量;

r 为固体节点 I 的核函数;

$\Theta^{m+1,k-1}$ 为第 $m+1$ 时间步的第 $k-1$ 次 Newton-Raphson 迭代的近似解;

e 通常为计算机误差平方根值(文献[8])。

在建立了 $n \times n$ 阶矩阵 H_n 和 $n \times (n+1)$ 阶矩阵 \bar{H}_n 后,对于 $j=1 \sim n, i=1 \sim (j-1)$,对 H_n 进行因式分解:

$$h_{ij} = c_i h_{ij} + s_i h_{(i+1)j}, \\ h_{(i+1)j} = -s_i h_{ij} + c_i h_{(i+1)j},$$

$$r = \sqrt{h_{jj}^2 + h_{(j+1)j}^2}, c_j = h_{jj}/r, s_j = h_{(j+1)j}/r \quad (3)$$

式中 h_{ij} 为矩阵 H_n 中的元素;

r, c 和 s 为 H_n 中元素计算得到的系数。

最后的解向量可以表达为,

$$\Delta \Theta^{k,m} = \Delta \Theta^{k,0} + \sum_{i=1}^n y_i q^i \quad (4)$$

式中 $\Delta \Theta^{k,m}$ 为第 m 时间步的第 k 次迭代解;

$\Delta \Theta^{k,0}$ 为初始向量;

y_i 为 Krylov 子空间内的列向量。

如果初始向量 $\Delta \Theta^{k,0}$ 在较小的 Krylov 子空间 K^n 内没有产生预期的结果,那么初始向量可更新为 $\Delta \Theta^{k,m}$,然后继续迭代过程,直到最后获得准确的解。

3 算例分析

采用本文算法,对一双坡型膜结构和空气间的流固耦合作用进行了计算模拟,计算模型如图1所示。 V_{10} 为 10 m 高处风速, H 为建筑物檐口高度,纵坐标 y 表示高度。模拟 B 类地貌,流动雷诺数 $Re = 1.75 \times 10^7$ 。边界条件为:进口风速 25 m/s,上方和右方出口压力为零,下方边界速度为零。空气密度取为 1.21 kg/m^3 ,空气粘性取为 $17.9 \times 10^{-6} \text{ Pas}$ 。膜材厚度为 3 mm, $E = 3.3 \times 10^8 \text{ N/m}^2$,单位面积质量为 1.25 kg/m^2 。流体域的时间步为 $\Delta t_f = 1.25 \times 10^{-3}$, $\Delta t_s = 1.25 \times 10^{-4}$ 。湍流模型采用标准 $k-\epsilon$ 模型。

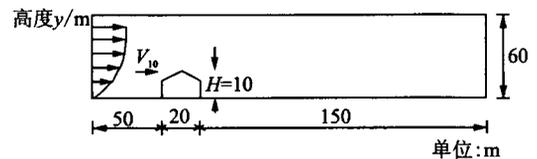


图1 双坡型膜结构计算模型

Fig. 1 Computing model of double-side membrane structure

注: V_{10} 为 10 m 高处的风速, H 为建筑物檐口高度

图2和图3分别给出了在不同时刻膜结构的风压分布和风速矢量图。

为了说明预定条件的高效性,本文分别采用带有预定条件和不带预定条件的无矩阵 Newton-Krylov 迭代法计算了上述算例,并对计算结果进行了对比。时间步的总数为 50,其中分别采用了 3 种衡量准则,即每一时间步的 Newton-Raphson 迭代数、每一 Newton-Raphson 迭代的 GMRES 迭代,以及在短时间内的总 CPU 时间。最后结果如表 1 所示。

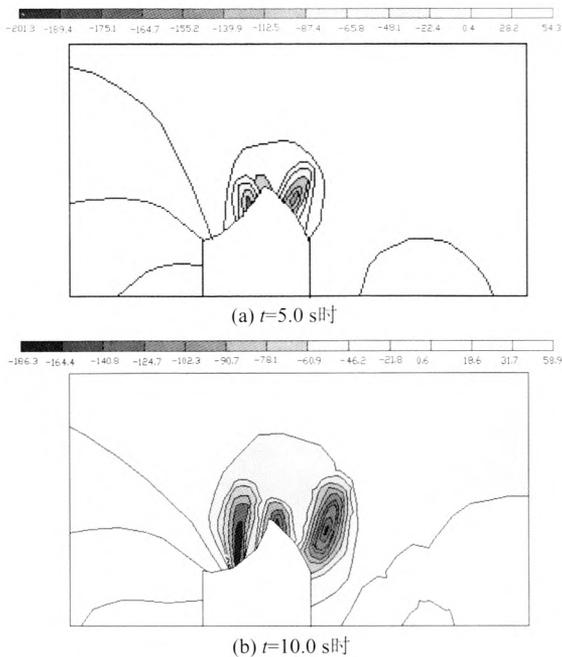


图2 不同时刻膜结构的风压分布
Fig. 2 Wind pressure distribution at different times

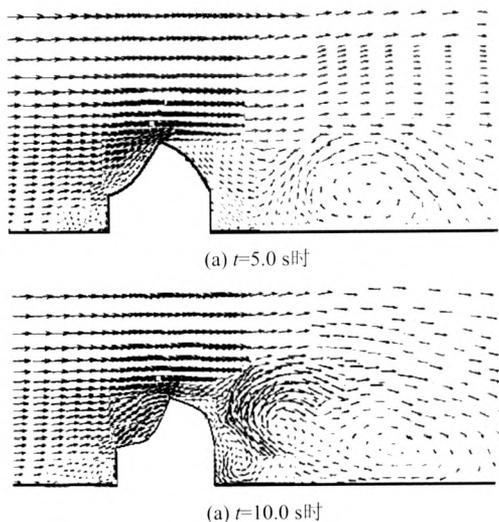


图3 膜结构在不同时刻的风速矢量
Fig. 3 Wind velocity vectors at different times

表1 有、无预定条件的无矩阵Newton-Krylon迭代法对比
Table 1 Comparison of Newton-Krylon no-matrix iteration procedure with and without precondition

25 时间步 (时间步长 0.1 s)	有预定 条件 方法	无预定 条件 方法
Newton-Raphson 迭代	7	17
GMRES 迭代	3	14
总CPU时间/s	2851	11064

从表中可以看出,预定条件方法与无预定条件方法相比,效率要高得多.但无论是否采用带有预定条件方法,最后的计算结果都在允许的迭代误差范围之内.

4 结论

对于膜结构风振中的流固耦合问题,本文采用浸入物体法(IOM)对膜结构和空气流体进行建模,并采用带有预定条件的无矩阵Newton-Krylov 迭代算法求解浸入物体法.利用上述方法对一双坡型膜结构与空气的耦合进行了计算,得到以下结论:

- (1)浸入物体法可以作为膜结构这种高柔性结构与空气耦合作用问题的建模方法.
- (2)带有预定条件的无矩阵迭代算法,可以用于求解浸入物体法,并能取得准确结果.
- (3)预定条件的无矩阵迭代法在计算膜结构与风的流固耦合问题时,可以得到准确结果,且与无预定条件方法相比,可以使计算效率大大提高.

参考文献:

- [1] Bathe K J, Zhang H. A flow-condition-based interpolation finite element procedure for incompressible fluid flows [J]. Computers & Structures, 2002, 80 (14-15):1267-1277.
- [2] Kohno H, Bathe K J. A flow-condition-based interpolation finite element procedure for triangular grids [J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2005,49(8):849-875.
- [3] Peskin C S. The immersed boundary method [J]. Acta Numerica, 2002,(11):479-517.
- [4] 宫兆新,鲁传敬,黄华雄. 浸入边界法及其应用[J]. 力学季刊, 2007,28(3):353-359.
Gong Z X, Lu C J, Huang H X. Immersed boundary method and its application[J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2007,28(3):353-359.
- [5] Tornberg A-K, Shelley M. Simulating the dynamics and interactions of flexible fibers in stokes flows [J]. Journal of Computational Physics, 2004, 196(1):8-40.
- [6] Wang Z J, Birch J, Dickinson M. Unsteady forces and vorticity field in hovering flight:two dimensional computations vs robotic wing experiments [J]. Journal of Experimental Biology, 2004,207(3):449-460.
- [7] Baaijens F P T. A fictitious domain/mortar element

- method for fluid-structure interaction [J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2001, 35(7):743-761.
- [8] Knoll D A, Keyes D E. Jacobian-free Newton-Krylov Methods; a survey of approaches and applications [J]. Journal of Computational Physics, 2004, 193(2):357-397.
- [9] Kay D, Loghin D, Wathen A. A pre-conditioner for the steady-state Navier-Stokes equations [J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2002, 24(1): 237-256.

Application of No-matrix Iteration Method in Coupling of Wind-induced Vibration of Membrane Structure

SUN Fang-jin¹, YIN Zhi-xiang², ZHANG Da-ming³

(1. Institute of Civil Engineering & Architecture, Liaoning Technical University, Fuxin 123000, China)

2. Graduate Institute, Liaoning Technical University, Fuxin 123000, China;

3. Technical and Economic Institute, Liaoning Technical University, Fuxin 123000, China)

Abstract: The application of no-matrix iteration method is studied to analyze the fluid-structure interaction in wind-induced vibration of membrane structure. Firstly, immersed object method (IOM) is employed to establish the finite element formula of membrane structures and the air flow. The weak form of the fluid-structure system is given using the IOM by introducing the fictitious domain. No-matrix Newton-Krylov iteration solution with pre-condition is proposed to solve the IOM established equations, with fluid velocity, fluid pressure, and solid pressure as the main unknowns. In the method, a pre-conditioning matrix rather than Jacobian matrix is needed for the calculation. Finite difference method is adopted to substitute the allowable velocity variance, which is a key step in the method. The presented method is then applied to analyze the fluid-structure interaction in wind-induced vibration of a double-sloped membrane structure. Wind pressure distribution and velocity vectors are obtained. Comparison is made between no-matrix iteration method with pre-condition and without pre-condition. And it is found that the one with pre-condition can greatly simplify the calculation. No-matrix iteration method applies well in studying fluid-structure interaction in wind-induced vibration of membrane structure, with accurate results, and with pre-condition, calculation efficiency is enormously improved.

Key words: no-matrix Newton-Krylov iteration method; immersed object method (IOM); membrane structure; wind-induced vibration; fluid-structure interaction