

文章编号: 1000-7598-(2007)03-0587-06

弹塑脆性岩土材料中柱形孔扩张大应变解

汪鹏程¹, 刘干斌², 朱向荣³

(1.合肥工业大学 土木建筑工程学院, 合肥 230009; 2.宁波大学 土木工程系, 宁波 315211; 3.浙江大学 岩土工程研究所, 杭州 310027)

摘要: 在应力跌落模型基础上引进软化阈值, 建立弹塑脆性模型, 模拟岩土材料的脆性软化特性, 采用双剪统一强度理论和不相关联流动法则, 考虑软化区的大应变, 对柱形孔扩张问题进行求解, 得出了扩张率-扩张压力的解析表达式。算例分析表明, 软化阈值对扩张变形和塑性区范围影响显著, 软化阈值越小, 扩张变形和塑性区范围越大, 且软化区占整个塑性区的比重越大; 是否考虑中间主应力对屈服的影响, 对解答也有明显的影响。

关键词: 弹塑脆性; 柱形孔扩张; 中间主应力; 大应变

中图分类号: TP 216.1

文献标识码: A

Solution to cylindrical cavities expansion in elastoplastic-brittle materials considering large strain

WANG Peng-cheng¹, LIU Gan-bin², ZHU Xiang-rong³

(1. College of Civil Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China; 2. Department of Civil Engineering, Ningbo University, Ningbo 315211, China; 3. Institute of Geotechnical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract: Based on stress dropping model, an elastoplastic-brittle model is established by using a softening threshold value to model the character of the geotechnical materials, twin shear strength theory and non-associated flow principle are used, and the large strain of softening zone is considered, a solution to cylindrical cavities expansion in elastoplastic-brittle materials is obtained. An example shows that the softening threshold value remarkably influences the deformations and range of the plastic zone; smaller threshold value leads greater expansion deformation, plastic zone range, and ratio of softening zone to entire plastic zone; and that considering the effects of intermediate principle stress on plastic yield or not, obviously influences the results.

Key words: elastoplastic-brittle; cylindrical cavity expansion; intermediate principal stress; large strain

1 引言

小孔扩张理论在岩土工程中具有重要的理论和实际意义, 国内外学者进行了不少研究, 如Carter^[1]推导了不相关联的Mohr-Coulomb理想弹塑性材料中孔扩张极限扩张力的近似解; Yu^[2]给出了Mohr-Coulomb理想弹塑性材料中孔扩张大应变解; Cao^[3]用修正的剑桥模型对孔扩张问题进行了求解。然而, 岩土材料种类繁多, 性质迥异, 有些岩土材料表现为应变软化的特性, 因此, 有人引进应力跌落模型来描述应变软化, 即认为应力在达到弹性极限以前, 材料为线弹性, 一旦达到弹性极限, 材料即屈服而软化, 研究弹脆性材料中孔扩张问题, 比如蒋明镜等^[4-5](1996年)以该模型在小变形理论基础上对孔扩张问题进行了研究; 汪鹏程等^[6]针对

该模型对大应变孔扩张问题进行了探讨。其实, 真正弹脆性材料是不存在的, 材料在出现应力跌落以前, 或多或少要经过一段塑性变形的过程。因此, 若引进应力跌落条件阈值来判断是否出现应力跌落, 应该更为合理。基于这种想法, 本文提出一个弹塑脆性模型, 考虑土的应变软化和剪胀特性以及软化区的大应变, 并且屈服准则使用能够体现中间主应力影响的双剪统一强度理论, 对柱形孔扩张问题进行求解。

2 弹塑脆性模型及本问题描述

前人所采用的应力跌落模型的应力-应变曲线由两段组成, 即屈服前的线弹性阶段和屈服后的残余强度阶段, 即认为材料在达到弹性极限之前为线弹性, 一旦达到弹性极限, 便会屈服, 并且强度降

为残余强度。其实，即便是岩石这样的脆性软化材料，在弹性极限之后、脆性软化之前，也要经过一定的塑性变形过程。只有当塑性变形达到一定的程度，才会出现脆性软化，因此本文提出弹塑脆性模型，如图 1 所示。应力-应变曲线由 3 段组成，即线弹性段、理想塑性段和残余强度段。本模型以微元体中与最大主应力和最小主应力都成 45° 的面上的剪应变即最大剪应变 γ_s ($\gamma_s = \epsilon_1 - \epsilon_2$)，来衡量塑性变形的程度（由于弹性剪应变相对于塑性剪应变很小而不计），当最大剪应变达到某一值时，材料即出现脆性软化，该最大剪应变的临界值即为软化阈值，其值在下文用 γ_f 表示。值得注意的是，本模型也只是岩土材料的一种理想简化模型，因为理想的脆性软化材料是不存在的，即便是脆性的岩石或混凝土材料，其软化也是渐进的过程，软化段成下降的曲线。

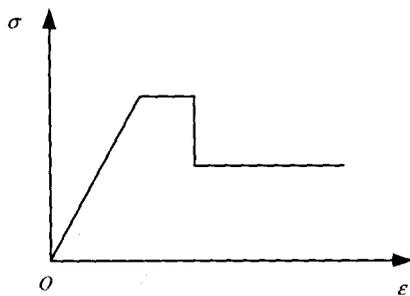


图 1 弹塑脆性应变软化模型
Fig.1 Elastoplastic-brittle model

本文研究的问题是弹塑脆性岩土材料中的孔扩张问题。如图 2 所示，在弹塑脆性材料的无限空间中作用有静水压力 p_0 ，其中有一无限长圆柱形孔，在由 p_0 缓慢增加的均布压力 p 作用下而扩张，其初始孔径为 a_0 ，扩张后孔径为 a ，孔周某点距离孔心初始距离为 r_0 ，扩张后距离为 r 。 b 为塑性区外半径； c 为软化区外半径。当扩张压力较小时，孔周材料处于弹性状态；当扩张压力增大到临界扩张压力时，孔口开始进入塑性。随着扩张压力进一步增大，贴近孔口部分区域剪应变达到软化阈值，材料出现软化形成环形软化区，孔口周围从里到外为软化区、理想塑性区和弹性区。为了方便，建立圆柱坐标系，柱孔的方向取垂直方向，即 z 方向，并假设 σ_z 为中间主应力，且 ϵ_z 为 0，为平面轴对称问题。规定应力-应变压为正，拉为负。以下凡下标为 0 代表土软化前的指标，下标为 d 代表软化后的指标。

假定条件如下：

(1) 孔扩张过程为准静态过程；(2) 材料为具有剪胀和应变软化特性的各向同性的均质弹塑脆性体；(3) 材料屈服服从双剪统一强度理论；(4) 塑性流动采用不相关联的流动法则，假设塑性势函数与屈服面函数形式相同，但剪胀与内摩擦角不相等。

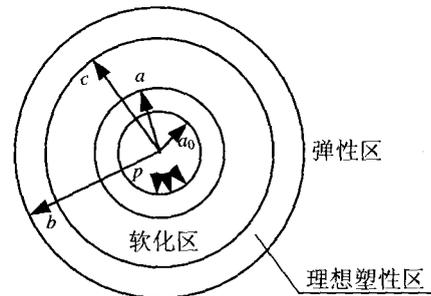


图 2 孔扩张问题示意图
Fig.2 Cavity expansion

3 基本方程

平衡方程为

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (1)$$

式中： σ_r ， σ_θ 分别为径向应力和周向应力。

应变公式为

$$\epsilon_r = -\frac{du_r}{dr}, \quad \epsilon_\theta = -\frac{u_r}{r} \quad (\text{小应变}) \quad (2)$$

式中： u_r 为径向位移； ϵ_r ， ϵ_θ 分别为径向和周向应变。

$$\epsilon_r = -\ln(dr/dr_0), \quad \epsilon_\theta = -\ln(r/r_0) \quad (\text{大应变}) \quad (3)$$

径向位移为

$$u_r = r - r_0 \quad (4)$$

边界条件为

$$\sigma_r(a) = p \quad (5)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sigma_r = p_0 \quad (6)$$

弹性应力-应变关系为

$$\epsilon_r = -\frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{1}{T_0} \left\{ \sigma_r - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_\theta \right\} \quad (7)$$

$$\epsilon_\theta = -\frac{u_r}{r} = \frac{1}{T_0} \left\{ -\frac{\nu}{1-\nu} \sigma_r + \sigma_\theta \right\} \quad (8)$$

式中： $T_0 = \frac{E_0}{1-\nu^2}$ ； E_0 为土体软化前的弹性模量；

ν 为泊松比。

考虑到岩土工程中的应力-应变符号规定，本问题中双剪统一强度理论可写为^[5]

$$\text{当 } \sigma_2 \leq \left[\frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) - \frac{\sin \varphi_0}{2}(\sigma_r - \sigma_\theta) \right] \text{ 时, 有}$$

$$f_0 = \sigma_r - \frac{\omega_0}{1+B}(B\sigma_2 + \sigma_\theta) = J_0 \quad (9)$$

$$\text{当 } \sigma_2 \geq \left[\frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) - \frac{\sin \varphi_0}{2}(\sigma_r - \sigma_\theta) \right] \text{ 时, 有}$$

$$f_0 = \frac{1}{1+B}(\sigma_r + B\sigma_2) - \omega_0 \sigma_\theta = J_0 \quad (10)$$

式中： $\omega_0 = (1 + \sin \varphi_0) / (1 - \sin \varphi_0)$ ； $J_0 = \frac{2c_0 \cos \varphi_0}{1 - \sin \varphi_0}$ ；

c_0 为土的黏聚力； φ_0 为土的内摩擦角； B 为反映中间主剪应力以及相应面上的正应力对材料破坏影响程度的权系数，其取值范围在 0~1 之间，取 0 时双剪统一屈服准则就变成 Mohr-Coulomb 屈服准则；取 1 时，就变成双剪强度准则。

经过简单推导，即可得知，对于柱形孔扩张问题来说，只有式 (10) 符合。定义中主应力系数 $n = \frac{2\sigma_2}{\sigma_r + \sigma_\theta}$ ，根据文献[7]，处于塑性状态时， n 趋向于 1。

将式 (10) 改写成为

$$f_0 = \sigma_r - \alpha_0 \sigma_\theta - y_0 = 0 \quad (11)$$

$$\text{其中: } \alpha_0 = \frac{2(1+B)\omega_0 - nB}{2+nB}, \quad y_0 = \frac{2J_0(1+B)}{2+nB}.$$

式 (11) 形式上与 Mohr-Coulomb 屈服准则相同，但参数完全不同。

同理，后继屈服准则为

$$f_d = \sigma_r - \alpha_d \sigma_\theta - y_d = 0 \quad (12)$$

$$\text{其中: } \alpha_d = \frac{2(1+B)\omega_d - nB}{2+nB}; \quad y_d = \frac{2J_d(1+B)}{2+nB};$$

$$J_d = \frac{2c_d \cos \varphi_d}{1 - \sin \varphi_d}, \quad \omega_d = \frac{1 + \sin \varphi_d}{1 - \sin \varphi_d}.$$

式中： c_d ， φ_d 分别为软化后的凝聚力和内摩擦角。

4 问题解答

当扩张压力较小时，孔周土全部处于弹性状态，其应力和位移解为

$$\sigma_r = p_0 + (p - p_0) \left(\frac{a}{r} \right)^2 \quad (13)$$

$$\sigma_\theta = p_0 - (p - p_0) \left(\frac{a}{r} \right)^2 \quad (14)$$

$$u_r = \frac{p - p_0}{2G_0} \left(\frac{a}{r} \right)^2 r \quad (15)$$

式中： G_0 为材料的剪切模量。

随着扩张压力增大，孔口边缘逐渐进入屈服。由式 (13)、式 (14) 和式 (11)，可求得临界扩张压力为

$$p_1 = \frac{y_0 + 2\alpha_0 p_0}{1 + \alpha_0} \quad (16)$$

$$\text{令 } \delta = \frac{y_0 + (\alpha_0 - 1)p_0}{2(1 + \alpha_0)G_0}, \text{ 则}$$

$$p_1 = 2G_0 \delta + p_0 \quad (17)$$

随着扩张压力继续增大，孔口边缘处最大剪应变 γ_s 达到软化阈值 γ_r ，便开始出现软化。孔周围形成三个区，从里到外依次为：应变软化区、理想塑性区和弹性区。在弹性区和理想塑性区交界处，径向应力 $\sigma_r = p_1 = 2G_0 \delta + p_0$ ，周向应力 $\sigma_\theta = -2G_0 \delta + p_0$ 。其中： σ_r ， σ_θ 分别为弹性区和塑性区交界处的径向和周向应力。

将式 (15) 中的 p 换成 σ_r ，即可得弹性区的

$$\text{位移为 } u_r = \delta \left(\frac{b}{r} \right)^2 r, \text{ 因此, } \varepsilon_r = \delta, \quad \varepsilon_\theta = -\delta.$$

其中： b 为塑性区外半径； ε_r ， ε_θ 分别为弹塑性交界面处的径向和切向应变。

在理想塑性区域 ($c \leq r \leq b$)，(c 为软化区外半径)，由平衡方程 (1)、屈服准则 (11)，结合相关边界条件，可得

$$\sigma_r = -\frac{y_0}{\alpha_0 - 1} + H_1 (b/r)^{(\alpha_0 - 1)/\alpha_0} \quad (18)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{y_0}{\alpha_0 - 1} + \frac{H_1}{\alpha_0} (b/r)^{(\alpha_0 - 1)/\alpha_0} \quad (19)$$

$$\text{式中: } H_1 = 2\delta G_0 + p_0 + \frac{y_0}{\alpha_0 - 1}.$$

对于弹性区域 ($r \geq b$)，将式 (13)、式 (14) 中的 p 换成弹塑性交界面上径向应力，将 a 换成塑性半径 b ，并结合相关边界条件，可得弹性区的应力为

$$\sigma_r = p_0 + 2\delta G_0 (b/r)^2 \quad (20)$$

$$\sigma_\theta = p_0 - 2\delta G_0 (b/r)^2 \quad (21)$$

在软化区 ($r \leq c$), 由平衡方程 (1) 和后继屈服准则式 (12), 可得

$$\sigma_r = -\frac{y_d}{\alpha_d - 1} + H_2 (c/r)^{(\alpha_d - 1)/\alpha_d} \quad (22)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{y_d}{\alpha_d - 1} + \frac{H_2}{\alpha_d} (c/r)^{(\alpha_d - 1)/\alpha_d} \quad (23)$$

式中: $H_2 = \sigma_{rc} + \frac{y_d}{\alpha_d - 1}$; σ_{rc} 为软化区与塑性区交界处的径向应力。

由式 (22) 及边界条件, 得

$$(c/a) = F_d^{\alpha_d/(\alpha_d - 1)} \quad (24)$$

$$F_d = \left[\frac{y_d + (\alpha_d - 1)p}{y_d + (\alpha_d - 1)\sigma_{rc}} \right] \quad (25)$$

根据假定, 在塑性区塑性流动服从不相关联的流动法则, 有:

$$\frac{\dot{\varepsilon}_r^p}{\dot{\varepsilon}_\theta^p} = -\frac{1}{\beta} \quad (26)$$

式中: $\beta = \frac{1 + \sin\psi}{1 - \sin\psi}$; ψ 为土的剪胀角; $\dot{\varepsilon}_r^p$, $\dot{\varepsilon}_\theta^p$ 分别为径向和周向塑性应变率。

因为

$$\dot{\varepsilon}_r = \dot{\varepsilon}_r^p + \dot{\varepsilon}_r^e \quad (27)$$

$$\dot{\varepsilon}_\theta = \dot{\varepsilon}_\theta^p + \dot{\varepsilon}_\theta^e \quad (28)$$

式中: $\dot{\varepsilon}_r$, $\dot{\varepsilon}_\theta$ 分别为径向和周向应变率; $\dot{\varepsilon}_r^e$, $\dot{\varepsilon}_\theta^e$ 分别为径向和周向弹性应变率。

由式 (26) ~ (28), 并利用式 (7)、式 (8), 可得

$$\beta d\varepsilon_r + d\varepsilon_\theta = \frac{1}{T_0} \left\{ \left[\beta - \frac{v}{1-v} \right] d\sigma_r + \left[1 - \frac{\beta v}{1-v} \right] d\sigma_\theta \right\} \quad (29)$$

式中: $T_0 = \frac{E_0}{1-v^2}$ 。

考察塑性区内的某点, 其应力为 σ_r 和 σ_θ , 对式 (29) 积分, 并利用初始条件 $\sigma_r = \sigma_{rp}$, $\sigma_\theta = \sigma_{\theta p}$ 时, $\varepsilon_r = \delta$, $\varepsilon_\theta = -\delta$, 可得

$$\beta\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = \frac{1}{T_0} \left\{ \left[\beta - \frac{v}{1-v} \right] \sigma_r + \left[1 - \frac{\beta v}{1-v} \right] \sigma_\theta - C_A \right\} \quad (30)$$

式中: $C_A = \left[\beta + 1 - \frac{v(1+\beta)}{1-v} \right] p_0$ 。

在理想塑性区应用小应变理论, 将式 (2)、式 (18)、式 (19) 代入式 (30), 可得

$$\frac{du_r}{dr} + \frac{1}{\beta} \frac{u_r}{r} = S_1 - S_2 \left(\frac{b}{r} \right)^{(\alpha_0 - 1)/\alpha_0} \quad (31)$$

式中 S_1 , S_2 均为常量, 且有

$$S_1 = \frac{1}{T_0} \left\{ \frac{y_0}{\alpha_0 - 1} \left[1 - \frac{v/\beta}{1-v} + \frac{1}{\beta} (1-2v) + \frac{2v}{\beta} - \frac{v}{1-v} \right] + \left[1 + \frac{1}{\beta} (1-2v) + \frac{2v}{\beta} - \frac{v(1+\beta)/\beta}{1-v} \right] p_0 \right\} \quad (32)$$

$$S_2 = \frac{H_1}{T_0} \left[1 - \frac{v/\beta}{1-v} + \frac{1}{\alpha_0 \beta} (1-2v) + \frac{2v}{\alpha_0 \beta} - \frac{v/\alpha_0}{1-v} \right] \quad (33)$$

解方程 (31), 并利用边界条件 $u_r|_{r=b} = \delta b$, 可得理想塑性区位移表达式:

$$u_r = \frac{S_1}{1+1/\beta} r + \frac{S_2 \beta}{\beta(\alpha_0 - 1)/\alpha_0 - 1 - \beta} r \left(\frac{b}{r} \right)^{(\alpha_0 - 1)/\alpha_0} + b \left(\delta - \frac{S_1}{1+1/\beta} - \frac{S_2 \beta}{\beta(\alpha_0 - 1)/\alpha_0 - 1 - \beta} \right) \left(\frac{b}{r} \right)^{1/\beta} \quad (34)$$

令

$$\varepsilon_{rc}^+ - \varepsilon_{\theta c} = -\frac{du_r}{dr} \Big|_{r=c} - \left(-\frac{u_r}{r} \Big|_{r=c} \right) = \gamma_f \quad (35)$$

将式 (34) 代入式 (35), 可得

$$\varepsilon_{\theta c} = -\frac{u_r}{r} \Big|_{r=c} = -\frac{S_1}{1+1/\beta} - \frac{S_2 \beta}{\beta(\alpha_0 - 1)/\alpha_0 - 1 - \beta} \left(\frac{b}{c} \right)^{(\alpha_0 - 1)/\alpha_0} - \left(\delta - \frac{S_1}{1+1/\beta} - \frac{S_2 \beta}{\beta(\alpha_0 - 1)/\alpha_0 - 1 - \beta} \right) \left(\frac{b}{c} \right)^{1+1/\beta} \quad (36)$$

从中即可求得 b/c 。式 (36) 中, ε_{rc}^+ 为软化区与理想塑性区交界处理想塑性区一侧的径向应变。如果令式 (35) 中的 $\gamma_f = \varepsilon_{rp} - \varepsilon_{\theta p}$, 可以求出 $b/c=1$, 此时理想塑性区消失, 应变软化区直接过渡到弹性区。

由式 (34) 可求得

$$\varepsilon_{\theta c} = -\frac{u_r}{r} \Big|_{r=c} = -\frac{S_1}{1+1/\beta} - \frac{S_2 \beta}{\beta(\alpha_0 - 1)/\alpha_0 - 1 - \beta} \left(\frac{b}{c} \right)^{(\alpha_0 - 1)/\alpha_0} - \left(\delta - \frac{S_1}{1+1/\beta} - \frac{S_2 \beta}{\beta(\alpha_0 - 1)/\alpha_0 - 1 - \beta} \right) \left(\frac{b}{c} \right)^{1+1/\beta} \quad (37)$$

式中： $\varepsilon_{\theta c}$ 为软化区与塑性区交界处的周向应变。

由式 (22) 得

$$(b/c) = F^{\alpha_0/(\alpha_0-1)} \quad (38)$$

$$F = \frac{(1+\alpha_0)[y_0 + (\alpha_0-1)\sigma_{rc}]}{2\alpha_0[y_0 + (\alpha_0-1)p_0]} \quad (39)$$

由式 (38)、式 (39)，可得

$$\sigma_{rc} = \frac{1}{\alpha_0-1} \left\{ (b/c)^{(\alpha_0-1)/\alpha_0} \frac{2\alpha_0}{1+\alpha_0} [y_0 + (\alpha_0-1)p_0] - y_0 \right\} \quad (40)$$

式中： σ_{rc} 为软化区与塑性区交界处的径向应力，有：

$$\sigma_{\theta c}^- = \frac{\sigma_{rc} - y_d}{\alpha_d} \quad (41)$$

在软化区，有：

$$\beta d\varepsilon_r + d\varepsilon_\theta = \frac{1}{T_d} \left\{ \left[\beta - \frac{\nu}{1-\nu} \right] d\sigma_r + \left[1 - \frac{\beta\nu}{1-\nu} \right] d\sigma_\theta \right\} \quad (42)$$

式中： $T_d = \frac{E_d}{1-\nu^2}$ ； E_d 为软化后的弹性模量。

考察软化区内的某点，其应力为 σ_r 和 σ_θ ，对式 (42) 积分，并利用初始条件：当 $\sigma_r = \sigma_{rc}$ ， $\sigma_\theta = \sigma_{\theta c}^-$ 时， $\varepsilon_r = \varepsilon_{rc}^-$ ， $\varepsilon_\theta = \varepsilon_{\theta c}$ ，可得

$$\beta(\varepsilon_r - \varepsilon_{rc}^-) + (\varepsilon_\theta - \varepsilon_{\theta c}) = \frac{1}{T_d} \left\{ \left[\beta - \frac{\nu}{1-\nu} \right] (\sigma_r - \sigma_{rc}) + \left[1 - \frac{\beta\nu}{1-\nu} \right] (\sigma_\theta - \sigma_{\theta c}^-) \right\} \quad (43)$$

式中： ε_{rc}^- 为软化区与理想塑性区交界处软化区一侧的径向应变。

经过简单推导可知：

$$\varepsilon_{rc}^- = \frac{1}{T_d} \left\{ \left[1 - \frac{\nu/\beta}{1-\nu} \right] (\sigma_{rc} - p_0) + \left[1/\beta - \frac{\nu}{1-\nu} \right] (\sigma_{\theta c}^- - p_0) \right\} - \frac{1}{\beta} \varepsilon_{\theta c} \quad (44)$$

将式 (43) 写成：

$$\beta\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = \frac{1}{T_d} \left\{ \left[\beta - \frac{\nu}{1-\nu} \right] \sigma_r + \left[1 - \frac{\beta\nu}{1-\nu} \right] \sigma_\theta - C_B \right\} \quad (45)$$

$$C_B = -(\beta\varepsilon_{rc}^- + \varepsilon_{\theta c})T_d + \left[\beta - \frac{\nu}{1-\nu} \right] \sigma_{rc}^- + \left[1 - \frac{\beta\nu}{1-\nu} \right] \sigma_{\theta c}^- \quad (46)$$

将式 (3)、式 (22) 及式 (23) 代入式 (45)，可得

$$\ln \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{1}{\beta}} \frac{dr}{dr_0} \right] = \ln Z - \xi \left(\frac{c}{r} \right)^{(\alpha_d-1)/\alpha_d} \quad (47)$$

其中

$$Z = \exp \left\{ \frac{1}{\beta T_d} \left[\frac{y_d}{\alpha_d-1} \left[\beta - \frac{\nu}{1-\nu} + 1 - \frac{\beta\nu}{1-\nu} \right] + C_B \right] \right\} \quad (48)$$

$$\xi = \frac{H_2}{T_d} \left\{ \left[1 - \frac{\nu/\beta}{1-\nu} \right] + \frac{1}{\alpha_d} \left[\frac{1}{\beta} (1-2\nu) + \frac{2\nu}{\beta} - \frac{\nu}{1-\nu} \right] \right\} \quad (49)$$

将方程 (47) 进行分离变量，对 r 和 r_0 分别在区间 $[c, r]$ 和 $[c-u_r, r=c, r_0]$ 上积分，并对 r 作变换， $\Omega = (c/r)^{(\alpha_d-1)/\alpha_d}$ ，可得

$$\frac{Z}{T} \left\{ (1 + \varepsilon_{\theta c})^{(\beta+1)/\beta} - (r_0/c)^{(\beta+1)/\beta} \right\} = \int_1^\Omega \exp(\xi\Omega) \Omega^{-T-1} d\Omega \quad (50)$$

$$\text{式中： } T = \frac{\alpha_d(\beta+1)}{(\alpha_d-1)\beta}$$

将 $r_0 = a_0$ 时 $r = a$ ，代入式 (50)，可得

$$\frac{Z}{T} \left\{ (1 + \varepsilon_{\theta c})^{(\beta+1)/\beta} - F_d^{-T} (a_0/a)^{(\beta+1)/\beta} \right\} = \int_1^{F_d} \exp(\xi\Omega) \Omega^{-T-1} d\Omega \quad (51)$$

解得

$$\frac{a}{a_0} = \left\{ F_d^T [(1 + \varepsilon_{\theta c})^{(\beta+1)/\beta} - (T/Z)] \int_1^{F_d} \exp(\xi\Omega) \Omega^{-T-1} d\Omega \right\}^{-\beta/(\beta+1)} \quad (52)$$

式中： a/a_0 为孔的扩张率。

5 算例及典型曲线

假定无限土体中有初始孔径 a_0 为 0.10 m 的圆柱形小孔，在扩张压力 $p = 1.2$ MPa 作用下而扩张。初始静水压力 $p_0 = 0.5$ MPa，土的弹性模量 $E_0 = E_d$ 取 15 MPa，泊松比 $\nu = 0.45$ ， $c_0 = 40$ kPa， $\varphi_0 = 20^\circ$ ， $c_d = 20$ kPa， $\varphi_d = 10^\circ$ ， $\psi = 5^\circ$ ，中主应力权系数 B 取 0.5，土的应变软化阈值分别取 0.05, 0.08, 0.1，通过计算，得到 c/b 分别为 0.952, 0.752, 0.671。扩张率和塑性区半径随扩张压力变化曲线如图 3 和图 4。可以看出，软化阈值对扩张结果影响明显，随着软化阈值减小，在相同扩张压力作用下，软化

区范围占整个塑性区范围的比值随之增大, 扩张率和整个塑性区半径也随之增大; 图5为软化阈值取0.05, B 分别取0和0.5两种情况下的扩张率-扩张压力曲线。取0时, 意味着没有考虑中间主应力对屈服的影响。从结果可以看出, 不考虑中间主应力影响时扩张结果偏大。

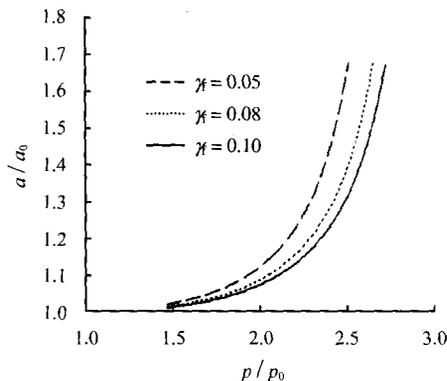


图3 扩张率-扩张压力关系曲线

Fig.3 Curve of the relation between expansion and pressure

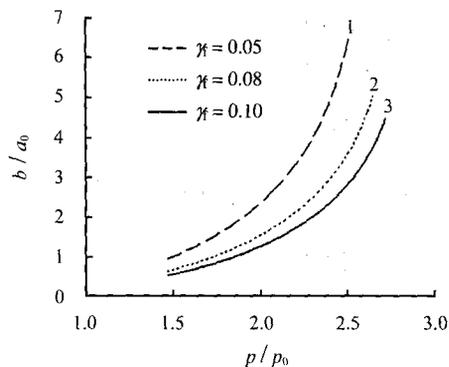


图4 塑性区半径扩张率-扩张压力关系曲线

Fig.4 Curve of the relation between plastic zone radius and expansion pressure

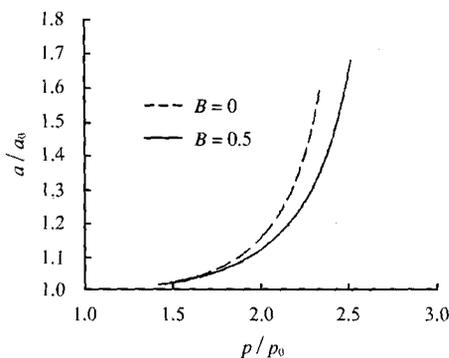


图5 扩张率-扩张压力关系曲线

Fig.5 Curve of the relation between expansion and pressure

6 结语

在弹脆性模型的基础上, 加上一个软化阈值, 建立弹塑脆性模型, 研究弹塑脆性岩土材料中孔扩张问题是有意义的; 软化阈值对孔扩张结果影响较显著, 随软化阈值减小, 扩张率和整个塑性区半径也随之增大, 并且软化区占整个塑性区范围的比值也增大; 是否考虑中间主应力对屈服的影响, 对孔扩张变形结果影响显著, 不考虑中间主应力影响时扩张结果偏大。

参考文献

- [1] Carter J P. Cavity expansion in cohesive frictional soils [J]. *Geotechnique*, 1986, 36(3): 349-353.
- [2] YU H S. Finite cavity expansion in dilation soils: loading analysis[J]. *Geotechnique*, 1991, 41(2): 173-183.
- [3] CAO L F, THE C I. Undrained cavity expansion in modified Cam clay I: Theoretical analysis[J]. *Geotechnique*, 2001, 51(4): 323-334.
- [4] 蒋明镜, 沈珠江. 考虑剪胀的弹脆塑性软化柱形孔扩张问题[J]. 河海大学学报, 1996, 24(4): 65-72.
JIANG Ming-jing, SHEN Zhu-jiang. Cylindrical cavity expansion in medium with dilation and elastic-brittle plastic behavior[J]. *Journal of Hohai University*, 1996, 24(4): 65-72.
- [5] 蒋明镜, 沈珠江. 考虑剪胀的弹脆塑性软化球形孔扩张问题[J]. 江苏农学院学报, 1996, 17(1): 83-90.
JIANG Ming-jing, SHEN Zhu-jiang. Spherical cavity expansion in medium with dilation and elastic-brittle plastic behavior[J]. *Journal of Jiangsu Agriculture Institute*, 1996, 17(1): 83-90.
- [6] 汪鹏程, 朱向荣. 应变软化及剪胀土体中考虑大变形的孔扩张问题解析[J]. 浙江大学学报(工学版), 2004, 38(7): 909-914.
WANG Peng-cheng, ZHU Xiang-rong. Analysis of cavity expansion in soil with shear dilation and strain softening considering large deformation[J]. *Journal of Zhejiang University(Engineering Science)*, 2004, 38(7): 83-90.
- [7] 周小平, 张永兴, 王建华. 考虑中间主应力影响时的圆筒形孔扩张问题的弹塑性解[J]. 重庆建筑大学学报, 2002, 24(2): 35-38.
ZHOU Xiao-ping, ZHANG Yong-xing, WANG Jian-hua. Influence of neutral principal stress on the elastic-plastic solution of expansion of cylindrical cavities[J]. *Journal of Chongqing University of Construction*, 2002, 24(2): 35-38.