

饱和地基中埋置点源荷载的动力 Green 函数

Dynamic Green's functions of saturated soils subjected to the internal excitation

陈胜立¹, 张建民¹, 陈龙珠²

(1. 清华大学 土木水利学院, 北京 100084; 2. 上海交通大学 建筑工程与力学学院, 上海 200030)

摘要: 基于合理的弹性土波动方程, 应用积分变换方法, 研究了饱和半空间地基中埋置点源荷载的轴对称 Lamb 问题解答。借助数值 Hankel 反演, 分析了地基表面竖向位移的变化规律, 并考察了土的渗透性及激振频率对它的影响。本文的结论可应用于地下爆破及地下结构等动力分析, 对工程实践有指导意义。

关键词: 饱和地基; Lamb 问题; 积分变换

中图分类号: TU 435

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2001)04-0423-04

作者简介: 陈胜立, 男, 1974 年生, 2000 年 6 月毕业于浙江大学建筑工程学院, 获工学博士学位。2000 年 9 月起为清华大学土木水利学院博士后, 主要从事土动力学的研究工作。

CHEN Sheng-li¹, ZHANG Jian-min¹, CHEN Long-zhu²

(1. School of Civil&Hydraulic Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China; 2. School of Architecture&Civil Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China)

Abstract: Based on the modified theory of elastic wave in saturated soils, Lamb's problem for saturated soils is studied in this paper. First, the governing differential equations for saturated soils are solved by means of Hankel transform. Then, under the consideration of the boundary-value condition, the solutions for the displacement and stress components of the saturated soils are expressed in term of integral forms which can be evaluated by numerical quadrature. Finally, the vertical surface displacement is numerically presented and the influence of the permeability and the frequency of the excitation on the vertical displacement is investigated. This study is reasonable for engineering practice and provides an effective method to analyze the similar problem about dynamic response of underground structure.

Key words: saturated soils; Lamb's problem; integral transform

1 引言

在半空间表面或内部作用有动力线荷载或点荷载而引起的弹性波动问题, 是弹性固体中波动领域里具有重要意义的一个课题, 对岩土工程和地震工程尤其具有重要价值。实际地基常为饱和土, 它是土骨架之间的孔隙为水所充满的一种流—固耦合两相介质, 宜将其按两相介质理论来研究。自 Biot^[1,2] 建立饱和土固结、波动方程以来, 众多学者对饱和土的 Lamb 问题开展了研究并取得了重要进展。1976 年 Paul^[3] 采用 Helmholtz 分解及 Hankel 变换研究了饱和弹性半空间的 Lamb 问题, 但忽略了土中孔隙水的粘滞性, 这与饱和土实际运动特性不符; Philippacopoulos^[4] 1988 年通过引入势函数, 研究了饱和土体的 Lamb 问题; 王立忠等^[5] 在略去流体相对土骨架的惯性力, 并假定水是不可压缩的前提下给出了饱和弹性半空间在低频谐和作用力下的 Lamb 积分形式解; 最近, 黄义等^[6] 提出位移组合积分变换和应力组合积分变换式, 研究了三维非轴对称的饱和土 Lamb 问题。

以上这些研究均局限于力源作用于地基表面时的 Lamb 解, 对于更具工程实际意义的 Lamb 内源问题, 由

于力学模型的复杂性以及数学处理上的困难, 尚少见报道。Senjuntichai 等^[7] 1994 年基于 Biot 波动理论, 引入势函数及 Fourier 积分变换得到了饱和土半空间在埋置线源荷载作用下的二维 Lamb 问题的解答, 但该模型距解决实际工程尚有一定的距离。为能获得可供实际应用的结果, 本文拟采用一组改进的弹性土波动方程^[8], 来研究饱和半空间地基中埋置点源荷载的轴对称 Lamb 问题的积分形式解答。通过 Hankel 积分变换, 可直接对波动方程进行求解, 获得饱和土各应力、位移分量在变换域内的解。进而由边值条件得到埋置点源荷载作用下饱和土位移与应力的积分形式解。对地表竖向位移幅值的变化规律作了算例分析, 据此考察它受土的渗透性及激振频率的影响。

2 饱和土基本动力方程及其通解

考虑轴对称简谐振动问题, 假定土体所有运动分量均具有时间因子 $e^{i\omega t}$, 则柱坐标系下饱和土体的基本动力方程及物理方程可写成^[8,9]

$$(\lambda + G + \frac{E_w}{n}) \frac{\partial e}{\partial r} + G(\nabla^2 - \frac{1}{r^2})w_r + \frac{E_w}{n} \frac{\partial \epsilon}{\partial r} = -(\rho_w \omega^2 v_r + \rho \omega^2 w_r) \quad (1)$$

$$(\lambda + G + \frac{E_w}{n}) \frac{\partial e}{\partial z} + G \nabla^2 w_z + \frac{E_w}{n} \frac{\partial \epsilon}{\partial z} = -(\rho_w \omega^2 v_z + \rho \omega^2 w_z) \quad (2)$$

$$\frac{E_w}{n} \frac{\partial e}{\partial r} + \frac{E_w}{n} \frac{\partial \epsilon}{\partial r} = -\rho_1 \omega^2 w_r - \rho_w \omega^2 v_r + i b \omega \frac{v_r}{n} \quad (3)$$

$$\frac{E_w}{n} \frac{\partial e}{\partial z} + \frac{E_w}{n} \frac{\partial \epsilon}{\partial z} = -\rho_1 \omega^2 w_z - \rho_w \omega^2 v_z + i b \omega \frac{v_z}{n} \quad (4)$$

$$\sigma_{zw} = 2G \frac{\partial w_z}{\partial z} + \lambda e \quad (5)$$

$$\tau_{zw} = G(\frac{\partial w_r}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial r}) \quad (6)$$

$$p_w = \frac{E_w}{n}(e + \epsilon) \quad (7)$$

式中 w_z, w_r 分别为饱和土骨架的竖向和径向位移; v_z, v_r 分别为孔隙水的相对竖向和径向位移, $v_z = n(u_z - w_z), v_r = n(u_r - w_r)$, 其中 n 为饱和土的孔隙率, u_z, u_r 为水相的竖向和径向位移; p_w, E_w 分别为孔隙水压力 and 水的体变模量, λ, G 是土骨架的 Lamé 常数; $\rho_1 = n \cdot \rho_w, \rho_2 = (1 - n)\rho_s, \rho_w, \rho_s$ 分别为水和土颗粒的质量密度 ($\rho = \rho_1 + \rho_2$, 饱和土的质量密度); ω 为激振频率, $b = n\rho_w g/k, g$ 为重力加速度, k 为土的渗透系数; σ_{zw}, τ_{zw} 分别为土骨架的正应力和剪应力; 而 e, ϵ, ∇^2 分别为土骨架, 孔隙水的体应变和二阶算子符号, 且有 $e = \frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{w_r}{r} + \frac{\partial w_z}{\partial z}, \epsilon = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z}, \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

由 $\frac{\partial}{\partial r}$ [式(1)] + $\frac{1}{r}$ [式(1)] + $\frac{\partial}{\partial z}$ [式(2)] 和 $\frac{\partial}{\partial r}$ [式(3)] + $\frac{1}{r}$ [式(3)] + $\frac{\partial}{\partial z}$ [式(4)], 我们得到

$$M' \nabla^2 e + \frac{E_w}{n} \nabla^2 \epsilon = -\rho_w \omega^2 \epsilon - \rho \omega^2 e \quad (8)$$

$$\frac{E_w}{n} \nabla^2 e + \frac{E_w}{n} \nabla^2 \epsilon = -\rho_1 \omega^2 e - \rho_w \omega^2 \epsilon + i b \omega \frac{\epsilon}{n} \quad (9)$$

式中 $M' = M + \frac{E_w}{n}, M = \lambda + 2G$.

若记函数 $f(r)$ 的 ν 阶 Hankel 变换为 $\tilde{f}^\nu(p)$, 对式(8), (9) 进行零阶 Hankel 变换后可以解得土骨架及水的体积应变:

$$\tilde{e}^0 = A_1 e^{-cz} + A_2 e^{cz} + B_1 e^{-dz} + B_2 e^{dz} \quad (10)$$

$$\tilde{\epsilon}^0 = \delta_1 (A_1 e^{-cz} + A_2 e^{cz}) + \delta_2 (B_1 e^{-dz} + B_2 e^{dz}) \quad (11)$$

式中 $c = \sqrt{p^2 - p_1^2}, d = \sqrt{p^2 - p_2^2}, p_1^2 = \frac{1}{2}(\beta_1 + \sqrt{\beta_1^2 - 4\beta_2}), p_2^2 = \frac{1}{2}(\beta_1 - \sqrt{\beta_1^2 - 4\beta_2}), \beta_1 = \frac{\rho_2 \omega^2}{M}$.

$$\frac{\rho_1 \omega^2}{E_w} - \frac{i b \omega M'}{E_w M}, \beta_2 = \frac{\rho_1 \rho_2 \omega^4}{E_w M} - \frac{i b \rho \omega^3}{E_w M}, \delta_k = -\frac{n}{i b \omega} (\rho_2 \omega^2 - M p_k^2), k = 1, 2; \text{而 } A_1, A_2, B_1, B_2 \text{ 为 } p \text{ 的任意函数.}$$

将式(10), (11) 代入式(2), (4) 我们可解得

$$\tilde{w}_z^0 = -c(\tilde{A}_1 e^{-cz} - \tilde{A}_2 e^{cz}) - d(\tilde{B}_1 e^{-dz} - \tilde{B}_2 e^{dz}) + p^2(\tilde{R}_1 e^{-jz} + \tilde{R}_2 e^{jz}) \quad (12)$$

$$\tilde{v}_z^0 = -c\delta_1(\tilde{A}_1 e^{-cz} - \tilde{A}_2 e^{cz}) - d\delta_2(\tilde{B}_1 e^{-dz} - \tilde{B}_2 e^{dz}) + p^2\delta_3(\tilde{R}_1 e^{-jz} + \tilde{R}_2 e^{jz}) \quad (13)$$

式中 $\delta_3 = -\frac{n}{i b \omega} (\rho_2 \omega^2 - G s^2)$, 而 $s^2 =$

$$\frac{1}{G \rho_1 \omega} (\frac{\rho_1 \rho_2 \omega^3}{i b} - \rho \omega^2), j = \sqrt{p^2 - s^2}; \tilde{A}_k = -\frac{A_k}{\rho_1^2},$$

$\tilde{B}_k = -\frac{B_k}{\rho_2^2}, (k = 1, 2), \tilde{R}_1, \tilde{R}_2$ 则为 p 的任意函数.

因为 $\tilde{w}_r^1 = \frac{1}{p}(\tilde{e}^0 - \frac{d\tilde{w}_z^0}{dz}), \tilde{v}_r^1 = \frac{1}{p}(\tilde{\epsilon}^0 - \frac{d\tilde{v}_z^0}{dz})$, 故有

$$\tilde{w}_r^1 = -p(\tilde{A}_1 e^{-cz} + \tilde{A}_2 e^{cz}) - p(\tilde{B}_1 e^{-dz} + \tilde{B}_2 e^{dz}) + p j(\tilde{R}_1 e^{-jz} - \tilde{R}_2 e^{jz}) \quad (14)$$

$$\tilde{v}_r^1 = -p\delta_1(\tilde{A}_1 e^{-cz} + \tilde{A}_2 e^{cz}) - p\delta_2(\tilde{B}_1 e^{-dz} + \tilde{B}_2 e^{dz}) + p j\delta_3(\tilde{R}_1 e^{-jz} - \tilde{R}_2 e^{jz}) \quad (15)$$

将式(10) ~ (15) 代入式(5) ~ (7), 于是得到

$$\tilde{\sigma}_{zw}^0 = k_1(\tilde{A}_1 e^{-cz} + \tilde{A}_2 e^{cz}) + k_2(\tilde{B}_1 e^{-dz} + \tilde{B}_2 e^{dz}) - 2G p^2 j(\tilde{R}_1 e^{-jz} - \tilde{R}_2 e^{jz}) \quad (16)$$

$$\tilde{\tau}_{zw}^1 = 2p c G(\tilde{A}_1 e^{-cz} - \tilde{A}_2 e^{cz}) + 2p d G(\tilde{B}_1 e^{-dz} - \tilde{B}_2 e^{dz}) - G p(p^2 + j^2)(\tilde{R}_1 e^{-jz} + \tilde{R}_2 e^{jz}) \quad (17)$$

$$\tilde{p}_w^0 = -\frac{E_w}{n} a_1(\tilde{A}_1 e^{-cz} + \tilde{A}_2 e^{cz}) - \frac{E_w}{n} a_2(\tilde{B}_1 e^{-dz} + \tilde{B}_2 e^{dz}) \quad (18)$$

式中 $k_1 = M c^2 - \lambda p^2, k_2 = M d^2 - \lambda p^2, a_1 = (1 + \delta_1) p_1^2, a_2 = (1 + \delta_2) p_2^2$.

3 边界条件

考虑图 1 所示的饱和地基半空间体系, 为列出边界条件, 我们可将饱和半空间地基沿荷载作用平面分割成两个区域, 以区域 1 表示 $0 \leq z \leq z'$, 区域 2 表示 $z' \leq z \leq \infty$ (以下我们将对各区域中的位移、应力分量以上标(1), (2)来区分). 由波的辐射条件可知, 对应于区域 2 的三个任意函数 $\tilde{A}_2^{(2)}, \tilde{B}_2^{(2)}, \tilde{R}_2^{(2)}$ 均应等于零. 若假定地基表面是透水的, 埋置竖向集中应力为 $\frac{1}{2\pi r} F_0 \delta(r)$, 则饱和地基半空间的位移与应力连续条件可写为

$$\sigma_{zw}^{(1)}(r, 0) = 0, \tau_{zw}^{(1)}(r, 0) = 0 \quad (19a)$$

$$p_{zw}^{(1)}(r, 0) = 0 \quad (19b)$$

$$\left. \begin{aligned} w_z^{(1)}(r, z') - w_z^{(2)}(r, z') &= 0 \\ w_r^{(1)}(r, z') - w_r^{(2)}(r, z') &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (19c)$$

$$p_w^{(1)}(r, z') - p_w^{(2)}(r, z') = 0 \quad (19d)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zw}^{(1)}(r, z') - \sigma_{zw}^{(2)}(r, z') &= \frac{1}{2\pi r} F_0 \delta(r) \\ \tau_{zw}^{(1)}(r, z') - \tau_{zw}^{(2)}(r, z') &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (19e)$$

$$v_z^{(1)}(r, z') - v_z^{(2)}(r, z') = 0 \quad (19f)$$

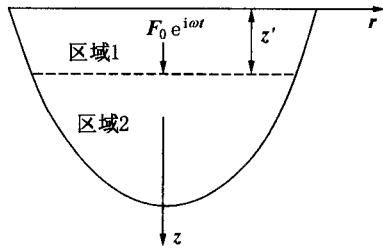


图1 饱和地基中埋置点源荷载力学模型

Fig.1 Geometry of the problem

将式(12) ~ (18)代入式(19a) ~ (19f)的 Hankel 变换式,同时注意到 $\int_0^\infty r \frac{F_0}{2\pi r} \delta(r) J_0(pr) dr = \frac{F_0}{2\pi}$, 我们可确定对应于区域1及区域2的各个未知函数:

$$\begin{aligned} \bar{A}_1^{(1)} &= \frac{F_0}{2\pi} \left[a_2 f_2 e^{-\alpha z'} - 8p^2 j G a_1 a_2 d e^{-\alpha z'} + 4G p^2 a_2 \right. \\ &\quad \left. (a_1 - a_2)(2p^2 - s^2) e^{-\alpha z'} \right] / 2Gs^2(a_1 - a_2)f \quad (20a) \end{aligned}$$

$$\bar{A}_2^{(1)} = \frac{F_0}{2\pi} \frac{a_2 e^{-\alpha z'}}{2Gs^2(a_1 - a_2)} \quad (20b)$$

$$\begin{aligned} \bar{B}_1^{(1)} &= \frac{F_0}{2\pi} \left[-8p^2 j G a_1 a_2 c e^{-\alpha z'} + a_1 f_1 e^{-\alpha z'} - 4G p^2 a_1 \right. \\ &\quad \left. (a_1 - a_2)(2p^2 - s^2) e^{-\alpha z'} \right] / 2Gs^2(a_1 - a_2)f \quad (20c) \end{aligned}$$

$$\bar{B}_2^{(1)} = -\frac{F_0}{2\pi} \frac{a_1 e^{-\alpha z'}}{2Gs^2(a_1 - a_2)} \quad (20d)$$

$$\begin{aligned} \bar{R}_1^{(1)} &= \frac{F_0}{2\pi} \left[-4ca_2 j G a_2 (2p^2 - s^2) e^{-\alpha z'} + 4da_1 j G \right. \\ &\quad \left. (2p^2 - s^2) e^{-\alpha z'} - f_3 e^{-\alpha z'} \right] / 2Gs^2 f \quad (20e) \end{aligned}$$

$$\bar{R}_2^{(1)} = \frac{F_0}{2\pi} \frac{e^{-\alpha z'}}{2Gs^2} \quad (20f)$$

$$\bar{A}_1^{(2)} = \bar{A}_1^{(1)} - \bar{A}_2^{(1)} e^{2\alpha z'} \quad (20g)$$

$$\bar{B}_1^{(2)} = \bar{B}_1^{(1)} - \bar{B}_2^{(1)} e^{2\alpha z'} \quad (20h)$$

$$\bar{R}_1^{(2)} = \bar{R}_1^{(1)} + \bar{R}_2^{(1)} e^{2\alpha z'} \quad (20i)$$

其中 $f = G(a_1 - a_2)(2p^2 - s^2)^2 - 4p^2 j G(da_1 - ca_2)$, $f_1 = G(a_1 - a_2)(2p^2 - s^2)^2 + 4p^2 j G(da_1 + ca_2)$, $f_2 = -G(a_1 - a_2)(2p^2 - s^2)^2 + 4p^2 j G(da_1 + ca_2)$, $f_3 = G(a_1 - a_2)(2p^2 - s^2)^2 + 4p^2 j G(da_1 - ca_2)$ 。

求得上述九个待定函数后,反代入式(12) ~ (18),进行 Hankel 反演,即可获得我们所需的饱和土位移及应力表达式。这里仅给出工程中比较关心的地

基表面竖向位移积分表达式:

$$w_z(r, 0) = \int_0^\infty p \frac{F_0}{2\pi f} \left\{ -a_2 c(2p^2 - s^2) e^{-\alpha z'} + a_1 d \cdot (2p^2 - s^2) e^{-\alpha z'} - 2(a_1 d - a_2 c) p^2 e^{-\alpha z'} \right\} J_0(pr) dp \quad (21)$$

上式中 f 即为瑞利函数。取 $z' = 0$ 的特殊情况,则本文结果可退化至力源作用在地基表面时的 Lamb 解。

4 数值算例分析

由于积分解中被积函数含有 Bessel 函数,式(21)属于广义振荡型积分。数值计算时,可按被积函数的零点将积分区间分成各子区间,通过加速积分技术来完成^[10]。作为算例,本节考虑某一饱和半空间地基,其物理力学参数为 $\lambda = 1.29 \times 10^7$ Pa, $G = 1.94 \times 10^7$ Pa,土骨架泊松比 $\nu = 0.2$, $n = 0.6$, $\rho_s = 2700$ kg/m³, $E_w = 2.10 \times 10^9$ N/m²,饱和土的渗透系数分别取 $k = 10^{-7}, 10^{-5}, 10^{-3}$ m/s。激振荷载幅值 $F_0 = 1000$ N,激振频率的变化取为 $\omega = 20, 50, 200$ rad/s,竖向集中谐和力埋置深度分别取 $z' = 1, 5, 10$ m。

图2,3,4分别为 $\omega = 20, 50, 200$ rad/s时饱和地基表面竖向位移幅值随距离 r 的变化曲线。对于不同的频率,我们还考察了力源埋置深度及土的渗透性对计算结果的影响。由图可见,随着 z' 的增加,地基表面的竖向位移急剧减小;而渗透系数 k 对地表位移幅值的影响不大,尤其对饱和粘土而言,其 k 值一般 $\leq 10^{-7}$,此时计算曲线几乎重合。图2~4还表明,当荷载埋置较浅时(如 $z' = 1$),不同激振频率下地表位移均随距离 r 的增加逐渐衰减,但随 ω 的增加,对应于 $z' = 5, 10$ m 的地表位移幅值 $|w_z|$ 随 r 变化的计算曲线依次出现了波动。

—•— $k=10^{-7}$ m/s, $z'=1$ m —○— $k=10^{-5}$ m/s, $z'=1$ m —▽— $k=10^{-3}$ m/s, $z'=1$ m
 - - - $k=10^{-7}$ m/s, $z'=5$ m - - - $k=10^{-5}$ m/s, $z'=5$ m - - - $k=10^{-3}$ m/s, $z'=5$ m
 ···· $k=10^{-7}$ m/s, $z'=10$ m ···· $k=10^{-5}$ m/s, $z'=10$ m ···· $k=10^{-3}$ m/s, $z'=10$ m

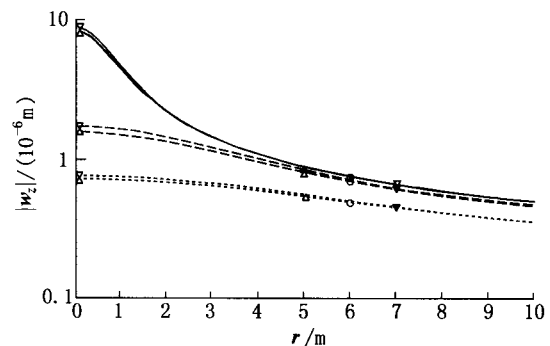


图2 $\omega = 20$ 时地表竖向位移幅值 $|w_z|$ 随 r 的变化曲线

Fig.2 The amplitude of the vertical surface displacement $|w_z|$ versus r ($\omega = 20$)

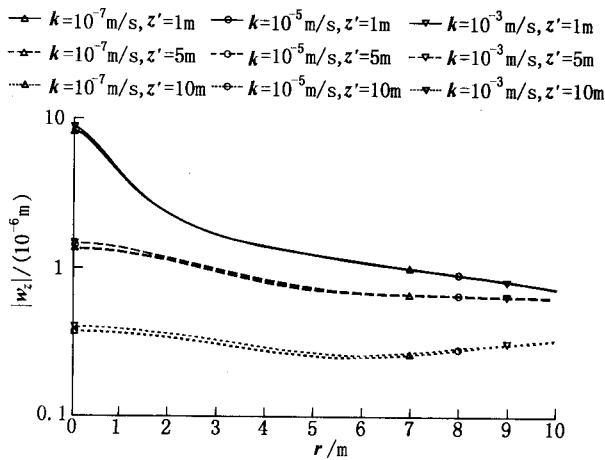


图3 $\omega = 50$ 时地表竖向位移幅值 $|w_z|$ 随 r 的变化曲线

Fig.3 The amplitude of the vertical surface displacement $|w_z|$ versus r ($\omega = 50$)

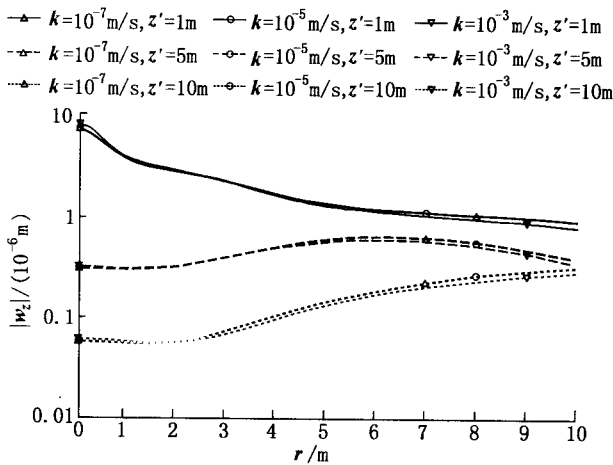


图4 $\omega = 200$ 时地表竖向位移幅值 $|w_z|$ 随 r 的变化曲线

Fig.4 The amplitude of the vertical surface displacement $|w_z|$ versus r ($\omega = 200$)

通过大量的计算发现,饱和地基半空间在埋置力源作用下的地表位移幅值 $|w_z|$ 随 r 的变化曲线的波动情况主要受 z', ω 两个参数的影响,一般而言, z' 或 ω 值愈大,其波动性亦愈强。这和文献[7]是一致的。然而,总体来说,地基表面竖向位移幅值由于受多个参数(诸如 k, z', ω) 的影响,其振动特性极为复杂,难以定量地描述其变化规律。

5 结 语

本文从一组改进的饱和土波动方程出发,通过 Hankel 积分变换,导出了埋置竖向点源荷载作用下饱和地基半空间 Lamb 内源问题的积分形式解,并且进行了数值分析。从上面的算例可以看出,饱和土渗透系数 k 值的大小对地基表面竖向位移幅值的影响不大;而埋置深度与激振频率的影响则较为明显,一般 z', ω 的值愈大,其幅值变化曲线的波动性亦愈强,即在距力源较远处地基表面,其竖向位移分量仍有可能超过力源附近地表的位移分量。因此在工程中需要对此加以考虑。

参考文献:

- [1] Biot M A. General theory of three-dimensional consolidation[J]. J Appl Phys, 1941, 12: 155 ~ 164.
- [2] Biot M A. The theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid[J]. J Acoust Soc Am, 1956, 28: 168 ~ 178.
- [3] Paul S. On the displacements produced in a porous elastic half-space by an impulsive line load (non dissipative case)[J]. Pure Appl Geophys, 1976, 114: 605 ~ 614.
- [4] Philippacopoulos A J. Lamb's problem for fluid-saturated porous media[J]. Bull Seism Soc Am, 1988, 78: 908 ~ 923.
- [5] 王立忠, 陈云敏, 吴世明, 等. 饱和弹性半空间在低频谱和集中力下的积分形式解[J]. 水利学报, 1996, (2): 84 ~ 88.
- [6] 黄 义, 张玉红. 饱和土三维非轴对称 Lamb 问题[J]. 中国科学(E), 2000, 30(4): 375 ~ 384.
- [7] Senjuntichai T, Rajapakse R K N D. Dynamic Green's functions of homogeneous poroelastic half-space[J]. J Mech Engrg, ASCE, 1994, 120(11): 2381 ~ 2404.
- [8] 陈龙珠. 饱和土中弹性波的传播速度及其应用[D]. 杭州: 浙江大学, 1987.
- [9] 陈龙珠, 陈胜立. 饱和地基上刚性基础的竖向振动分析[J]. 岩土工程学报, 1998, 21(4): 392 ~ 397.
- [10] Longman I M. Note on a method for computing infinite integral of oscillatory function[J]. Cambridge Phil Soc Proc, 1956, 52: 764 ~ 768.