

文章编号:1000-1301(2008)04-0001-05

SH波在浅埋可移动圆柱形刚性夹杂处的散射与地震动

杨在林^{1,2}, 孙柏涛¹, 刘殿魁²

(1. 中国地震局工程力学研究所, 黑龙江 哈尔滨 150080; 2. 哈尔滨工程大学建筑工程学院, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要:采用复函数、多极坐标法研究了含有可移动圆柱形刚性夹杂的弹性半空间对SH波的散射问题。构造一个能自动满足含可移动刚性圆柱的弹性半空间自由表面上应力为零的边界条件的散射波,应用可移动圆柱形刚性夹杂的运动条件来确定该散射波。最终则可将求解问题归结为求解一个无穷代数方程组,采用截断有限项的方法对其进行求解。给出了地表位移幅值的数值结果,并讨论了各种参数对它的影响。

关键词:SH波散射;弹性半空间;可移动圆柱形刚性夹杂;地震动

中图分类号:P315.31 **文献标志码:**A

Scattering of SH-waves and ground motion by a shallow-embedded removable rigid cylindrical inclusion

YANG Zailin^{1,2} SUN Baitao¹ LIU Diankui²

(1. Institute of Engineering Mechanics, China Earthquake Administration, Harbin 150080, China;

2. School of Civil Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

Abstract: The problem of SH-wave scattering, which is caused by a removable rigid cylindrical inclusion near the interface of elastic half space, is studied in this paper. The methods of complex variables and multi-polar coordinates are used here. The scattering wave function which can satisfy the condition of stress free on the horizontal surface around a removable rigid cylindrical inclusion in half space is constructed, and the expression of scattering wave can be determined by virtue of the boundary conditions of removable rigid cylindrical inclusion. The problem can be reduced to a solution of algebraic equations and solved numerically by truncating the finite terms of the infinite algebraic equations. Finally, the numerical results of horizontal surface displacement are given and discussed in the case of different parameters.

Key words: scattering of SH-wave; elastic half space; removable rigid cylindrical inclusion; ground motion

引言

对界面附近可移动圆柱形刚性夹杂对弹性波散射问题的研究,求解该问题的理论解是有相当困难的^[1-5]。随着计算力学的发展,该问题可以用不同的数值方法进行求解,并可得到数值结果。但人们仍希望找到一个理论解,用以研究可移动圆柱形刚性夹杂附近的动应力分布与波数、夹杂埋深的关系。若将界面附

收稿日期:2007-11-15; 修订日期:2008-04-30

基金项目:黑龙江省自然科学基金项目(A0206)

作者简介:杨在林(1971-),男,副教授,博士,主要从事弹性波动理论研究。E-mail: yangzailin00@163.com

近可移动圆柱形刚性夹杂视为浅埋结构,则属于浅埋结构的地震动问题。本文研究 SH 波的入射问题,以求得一个解答。利用 SH 波散射具有的对称性质和多极坐标方法,构造一个能自动满足含可移动刚性圆柱的弹性半空间自由表面上应力为零的边界条件的散射波,应用可移动圆柱形刚性夹杂的运动条件来确定该散射波,最终则可将求解问题归结为求解一个无穷代数方程组,采用截断有限项的方法对其进行求解。针对给出的具体算例进行了讨论。

1 控制方程和边界条件

1.1 基本方程

在各向同性介质中研究弹性波对夹杂的散射问题,最为简单的模型就是反平面剪切运动的 SH 波模型。对于稳态情况,引入复变量 $z = x + iy, \bar{z} = x - iy$, 在复平面 (z, \bar{z}) 上,位移 $W(z, \bar{z}, t)$ 要满足运动方程

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{1}{4} k^2 W = 0 \quad (1)$$

其中: W 为位移函数,位移函数与时间的依赖关系为 $e^{-i\omega t}$, (以下分析略去时间谐和因子 $e^{-i\omega t}$)。 $k = \frac{\omega}{c_s}$, ω 为

位移 $W(x, y, t)$ 的圆频率; c_s 为介质的剪切波速; $c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$; ρ, μ 分别为介质的质量密度和剪切模量。

在极坐标系中应力的表达式为:

$$\tau_{rz} = \mu \left(\frac{\partial W}{\partial z} e^{i\theta} + \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} e^{-i\theta} \right), \tau_{\theta z} = i\mu \left(\frac{\partial W}{\partial z} e^{i\theta} - \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} e^{-i\theta} \right) \quad (2)$$

1.2 入射波、反射波、散射波

含可移动圆柱形刚性夹杂的弹性半空间如图 1 所示。介质的密度和横波速度分别为 ρ 和 c_s , 刚性夹杂的密度为 ρ_r 。入射的稳态 SH 波在弹性半空间中,且与 $o_1 x_1$ 轴成某一夹角 α_0 , 在界面 $y = h$ 上应力自由。

在一个完整的弹性半空间中,有一个稳态的 SH 波 $W^{(i)}$ 入射,则在界面上就会产生一个反射的 SH 波 $W^{(r)}$, 而它们在复平面上可以写成:

$$W^{(i)} = W_0 e^{i\frac{k}{2}[(z-ih) \cdot e^{-i\alpha_0} + (\bar{z}+ih) \cdot e^{i\alpha_0}]} \quad (3)$$

$$W^{(r)} = W_0 e^{i\frac{k}{2}[(z-ih) \cdot e^{i\alpha_0} + (\bar{z}+ih) \cdot e^{-i\alpha_0}]} \quad (4)$$

其中, W_0 为入射波的波幅。

而 $W^{(i)}$ 与 $W^{(r)}$ 相对应的应力为:

$$\tau_{rz}^{(i)} = i\tau_0 \cos(\theta - \alpha_0) e^{i\frac{k}{2}[(z-ih) \cdot e^{-i\alpha_0} + (\bar{z}+ih) \cdot e^{i\alpha_0}]} \quad (5)$$

$$\tau_{\theta z}^{(i)} = -i\tau_0 \sin(\theta - \alpha_0) e^{i\frac{k}{2}[(z-ih) \cdot e^{-i\alpha_0} + (\bar{z}+ih) \cdot e^{i\alpha_0}]} \quad (6)$$

$$\tau_{rz}^{(r)} = i\tau_0 \cos(\theta + \alpha_0) e^{i\frac{k}{2}[(z-ih) \cdot e^{i\alpha_0} + (\bar{z}+ih) \cdot e^{-i\alpha_0}]} \quad (7)$$

$$\tau_{\theta z}^{(r)} = -i\tau_0 \sin(\theta + \alpha_0) e^{i\frac{k}{2}[(z-ih) \cdot e^{i\alpha_0} + (\bar{z}+ih) \cdot e^{-i\alpha_0}]} \quad (8)$$

现在构造如图 1 所示的由可移动刚性圆柱激发的散射波。它除了要求满足方程(1)之外,还要满足无穷远处的辐射条件和在半空间自由表面 $o_1 x_1$ 上应力自由的条件。这样规定散射波,将会为求解半空间界面附近可移动刚性圆柱散射问题带来方便。

在复平面 (z, \bar{z}) 上,可利用 SH 波散射的对称性和多极坐标的方法来构造这个界面附近可移动刚性圆柱的散射波 $W^{(s)}$ 。它可以写成^[6,7]:

$$W^{(s)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \{ H_n^{(1)}(k|z|) \left[\frac{z}{|z|} \right]^n + H_n^{(1)}(k|z-2hi|) \left[\frac{z-2hi}{|z-2hi|} \right]^{-n} \} \quad (9)$$

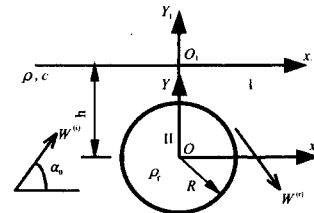


图 1 SH 波作用于含可移动刚性圆柱的无限半空间模型

Fig. 1 The infinite half space model with a removable rigid cylindrical inclusion by SH wave

而散射波 $W^{(s)}$ 所激发的应力,在极坐标系中有:

$$\begin{aligned} \tau_{rz}^{(s)} = & \frac{k\mu}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \{ H_{n-1}^{(1)}(k|z|) \left[\frac{z}{|z|} \right]^{n-1} e^{i\theta} - H_{n+1}^{(1)}(k|z|) \left[\frac{z}{|z|} \right]^{n+1} e^{-i\theta} \\ & + \left[-H_{n+1}^{(1)}(k|z-2hi|) \left[\frac{z-2hi}{|z-2hi|} \right]^{-(n+1)} e^{i\theta} + H_{n-1}^{(1)}(k|z-2hi|) \left[\frac{z-2hi}{|z-2hi|} \right]^{-(n-1)} e^{-i\theta} \} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z}^{(s)} = & i \frac{k\mu}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \{ H_{n-1}^{(1)}(k|z|) \left[\frac{z}{|z|} \right]^{n-1} e^{i\theta} + H_{n+1}^{(1)}(k|z|) \left[\frac{z}{|z|} \right]^{n+1} e^{-i\theta} \\ & + \left[-H_{n+1}^{(1)}(k|z-2hi|) \left[\frac{z-2hi}{|z-2hi|} \right]^{-(n+1)} e^{i\theta} - H_{n-1}^{(1)}(k|z-2hi|) \left[\frac{z-2hi}{|z-2hi|} \right]^{-(n-1)} e^{-i\theta} \} \end{aligned} \quad (11)$$

1.3 边界条件及问题的求解

在 $r=R$ 处有边值条件:

$$W_{II}|_{r=R} = W_{II} \quad (12)$$

对于刚性夹杂的出平面运动,满足

$$m \times a = - \int_0^{2\pi} \tau_{rz}^1 |_{r=R} R d\theta \quad (13)$$

若 $W_{II} = A$ 为刚性夹杂的位移,设其单位厚度的质量为 m , $m = \pi R^2 \rho_f, \rho_f$ 为夹杂的密度,上式可化简为:

$$k^2 \mu \pi R \frac{\rho_f}{\rho} A = - \int_0^{2\pi} \tau_{rz}^1 d\theta \quad (14)$$

I 区的位移为

$$W_I = W^{(i)} + W^{(r)} + W^{(s)} \quad (15)$$

I 区的应力为

$$\tau_{rz} = \tau_{rz}^{(i)} + \tau_{rz}^{(r)} + \tau_{rz}^{(s)} \quad (16)$$

将式(5)、(7)、(10)代到式(6)中得:

$$\tau_{rz} = \xi + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \times \xi_n \quad (17)$$

其中:

$$\xi = ik\mu W_0 \exp_1 \cos(\theta - \alpha_0) + ik\mu W_0 \exp_2 \cos(\theta + \alpha_0) \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \xi_n = & \frac{k\mu}{2} e^{i\theta} \left[H_{n-1}^{(1)}(k|Z|) \left(\frac{Z}{|Z|} \right)^{n-1} - H_{n+1}^{(1)}(k|Z-2hi|) \left(\frac{Z-2hi}{|Z-2hi|} \right)^{-(n+1)} \right] \\ & + \frac{k\mu}{2} e^{-i\theta} \left[-H_{n+1}^{(1)}(k|Z|) \left(\frac{Z}{|Z|} \right)^{n+1} + H_{n-1}^{(1)}(k|Z-2hi|) \left(\frac{Z-2hi}{|Z-2hi|} \right)^{-(n-1)} \right] \end{aligned} \quad (19)$$

II 区的位移为

$W_{II} = W_I |_{r=R} = A$, 则有:

$$\begin{aligned} A = & W_0 \{ e^{i\frac{k}{2}[(Re^{i\theta} - hi)e^{-i\alpha_0} + (Re^{-i\theta} + hi)e^{i\alpha_0}]} + e^{i\frac{k}{2}[(Re^{i\theta} - hi)e^{i\alpha_0} + (Re^{-i\theta} + hi)e^{-i\alpha_0}]} \} \\ & + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \left[H_n^{(1)}(kR) (e^{i\theta})^n + H_n^{(1)}(k|Z-2hi|) \left(\frac{Re^{i\theta} - 2hi}{|Z-2hi|} \right)^{-n} \right] \end{aligned} \quad (20)$$

将式(17)、(20)代入边界条件(14)中得:

$$-k^2 \mu \pi R \frac{\rho_f}{\rho} A = \int_0^{2\pi} (\xi + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \times \xi_n) |_{r=R} d\theta \quad (21)$$

为求解 A_n , 式(21)应作相应变换。令式(21)左边:

$$-k^2 \mu \pi R \frac{\rho_f}{\rho} A = a + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \times a_n \quad (22)$$

其中:

$$a = -k^2 \mu \pi R \frac{\rho_f}{\rho} W_0 \{ e^{\frac{k}{2}[(Re^{i\theta} - hi)e^{-i\alpha_0} + (Re^{-i\theta} + hi)e^{i\alpha_0}]} + e^{\frac{k}{2}[(Re^{i\theta} - hi)e^{i\alpha_0} + (Re^{-i\theta} + hi)e^{-i\alpha_0}]} \} \quad (23)$$

$$a_n = -k^2 \mu \pi R \frac{\rho_f}{\rho} \left[H_n^{(1)}(kR)(e^{i\theta})^n + H_n^{(1)}(k|Re^{i\theta} - 2hi|) \left(\frac{Re^{i\theta} - 2hi}{|Re^{i\theta} - 2hi|} \right)^{-n} \right] \quad (24)$$

同时,设式(21)右边的被积函数为 $B(\theta)$,

$$B(\theta) = \xi + \sum_{-\infty}^{\infty} A_n \times \xi_n \quad (25)$$

交换积分与求和的顺序,则:

$$\int_0^{2\pi} B(\theta) d\theta = b + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \times b_n \quad (26)$$

其中:

$$b = \int_0^{2\pi} \xi d\theta, \quad b_n = \int_0^{2\pi} \xi_n d\theta \quad (27)$$

代回到式(21)中,得:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (a_n - b_n) = b - a \quad (28)$$

用 $e^{-im\theta}$ 乘以(28)的左右两边,并在区间 $(-\pi, \pi)$ 上积分,得:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n f_{mn} = f_m \quad (29)$$

其中:

$$f_{mn} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n - b_n) e^{-im\theta} d\theta$$

$$f_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (b - a) e^{-im\theta} d\theta \quad (30)$$

上式(29)即为决定未知系数 A_n 的无穷代数方程组。

2 地表位移幅值

研究含有浅埋可移动圆形刚柱的弹性半空间在 SH 波作用下的地震动问题,应该给出水平地表任一点的出地表位移。求出地表位移,即可求出该点的加速度值,这对结构的抗震设计是十分重要的。

弹性半空间中的总波场为:

$$W^{(1)} = W^{(i)} + W^{(r)} + W^{(s)} \quad (31)$$

其中 $W^{(i)}$ 、 $W^{(r)}$ 和 $W^{(s)}$ 分别为式(3)、(4)、(9)。

3 算例与讨论

根据上面的理论推导,给出了界面附近可移动刚性圆柱对 SH 波散射位移场的数值结果,讨论了不同的波数 KR 、入射角 α_0 、不同的夹杂中心到水平界面的距离与夹杂半径的比值 h/R 、刚性柱和基体介质的密度比 ρ^* ($\rho^* = \rho_f/\rho$) 对地表位移的影响。

图 2 给出了地表面的位移幅值 $|W^{(1)}|$ 随 x/R 的变化。其中:图 2(a) 为入射波数 $KR=0.5$ 、密度比 $\rho^* = 3.0$ 、入射角 $\alpha_0=0$ 、埋深比 $h/R=5.0$ 时,在 $X/R \approx -2$ 处,位移幅值可达 4.1,说明有浅埋结构时地表位移响应十分强烈。图 2(b) 为随着夹杂埋深的增大地表位移幅值逐渐降低,当 $h/R > 12.0$ 时,趋于稳定。图 2(c)、(d)、(e) 反映出 $|W^{(1)}|$ 随着入射角 α_0 的变化情况,其中图 2(c)、(d) 是斜入射时的情况,说明迎波面的地表位移响应不大,而背波面响应却十分强烈,并且随着入射角度的增大,响应越来越弱;图 2(e) 表示垂直入射时的情况,夹杂上方的位移呈对称分布。图 2(f) 为地表位移随 ρ^* 的变化,说明密度比对位移的影响并

不大。

从算例看出,即便是垂直入射时,最大的位移幅值并不总是发生在加载的正上方,夹杂与基体的密度比对位移影响不大。位移随着夹杂埋深的增大而减小。

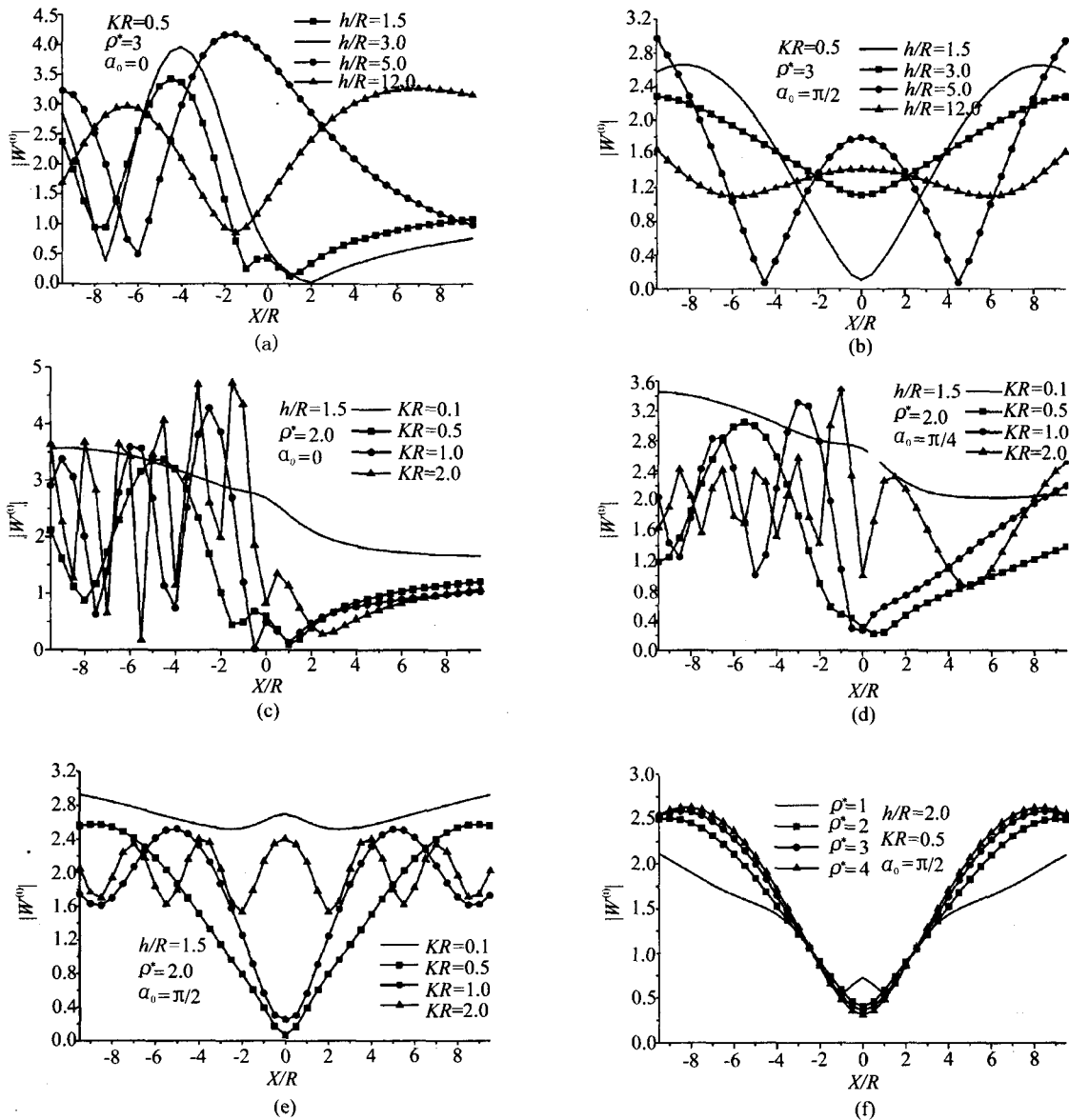


图2 地表的位移幅值 $|W^{(1)}|$ 随 X/R 的变化

Fig.2 Variation of surface displacement amplitudes $|W^{(1)}|$ with X/R

参考文献:

[1] Pao Y.H, Mow C.C. Diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations. crane and Russak[M]. New York, 1973: 114 - 304.
 [2] 黎在良,刘殿魁. 固体中的波[M]. 北京:科学出版社,1995.
 [3] Yang Z L, Liu Diankui, Shi W P. Scattering far field solution of SH-wave by movable rigid cylindrical interface[J]. Acta Mechanica Solida Sinica. 2002, 15(3): 214 - 220.
 [4] 刘殿魁,杨在林,刘建百. 界面可移动圆柱形刚性夹杂对SH波散射及动应力集中[J]. 哈尔滨建筑大学学报, 2001, 34(6): 1 - 7.
 [5] 刘殿魁,林宏. SH波对双相介质界面附近圆形孔洞的散射[J]. 固体力学学报, 2003, 24(2): 197 - 204.
 [6] 林宏,刘殿魁. 半无限空间中圆形孔洞周围SH波的散射[J]. 地震工程与工程振动, 2002, 22(2): 9 - 16.
 [7] 刘殿魁,林宏. 浅埋的圆形孔洞对SH波散射与地震动[J]. 爆炸与冲击, 2003, 23(1): 6 - 12.