

文章编号: 1000-7598-(2004)07-1127-04

基于梯度塑性本构理论的岩样侧向变形分析(II): 尺寸效应及弹性回跳

王学滨, 刘杰, 王雷, 潘一山

(辽宁工程技术大学 力学与工程科学系, 辽宁 阜新 123000)

摘要: 提出了利用不同尺寸试件的轴向应力-应变曲线得到轴向应力-侧向应变曲线的一种方法, 并研究了结构尺寸对轴向应力-侧向应变曲线的影响。根据尺寸不同试件的轴向应力-轴向应变曲线的实验结果, 并基于梯度塑性理论的解析解, 在应变软化阶段, 确定出了各种试件的剪切带条数。由此求出了不同宽度试样的轴向应力-侧向应变曲线。剪切带条数与试件宽度之比是决定轴向应力-侧向应变曲线特征的关键指标。若该比率为常量, 则上述曲线不具有尺寸效应。当宽试件及窄试件在局部化启动后, 在试件内部都出现一条剪切带时, 随着试件宽度的增加, 该曲线越陡, 甚至出现回跳。上述方法也可用于分析轴向应力-环向应变曲线的尺寸效应问题。尺寸效应的原因是局部化, 但局部化并非总引起尺寸效应。

关键词: 梯度塑性理论; 尺寸效应; 局部化; 侧向变形; 回跳; 剪切带条数; 试件宽度

中图分类号: TU 451 **文献标识码:** A

Analysis of lateral deformation of rock specimen based on gradient-dependent plasticity (II): size effect and snap-back

WANG Xue-bin, LIU Jie, WANG Lei, PAN Yi-shan

(Department of Mechanics and Engineering Sciences, Liaoning Technical University, Fuxin 123000, China)

Abstract: Influence of structural size on axial stress-lateral strain curves due to shear localization is investigated and a new method for determining the axial stress-lateral strain curves is proposed according to the axial stress-strain curves obtained by tests for different sizes. Using the analytical solution of the axial stress-axial strain curve based on gradient-dependent plasticity, linear regressions on the experimental axial stress-axial strain curves in strain-softening regime are carried out to calculate the number of shear band for different widths. After the number is determined, the axial stress-lateral strain curves for different sizes can be obtained according to the analytical solution of axial stress-lateral strain curve depending on the number of shear band and width of specimen. It is found that the ratio of the number of shear band to the width of specimen is a key parameter for describing the axial stress-lateral strain curves. If the ratio remains a constant, then the curves are size-independent. Otherwise, the post-peak curves are dependent on the width of specimen. For a single shear band appears in specimens with different widths, specimen with larger width leads to steeper curves and even exhibits snap-back behavior. The method proposed can also be used to analyze the problem of size effect of axial stress-circumferential strain curves. The reason for the size effect is shear localization, but the case that localization can not cause the size effect is not also impossible.

Key words: gradient-dependent plasticity; size effect; localization; lateral deformation; snap-back; number of shear band; width of specimen

1 引言

由于在岩土力学中不得不对小尺寸的试件进行试验, 因此, 不可回避尺寸效应问题, 尺寸效应的重要性已逐渐被人们认识到。尺寸效应问题主要涉及以下几方面: (1) 强度的尺寸效应, 如抗压强度^[1]

及抗拉强度^[2]等的尺寸效应; (2) 断裂韧度和断裂能等断裂力学参数的尺寸效应^[3]; (3) 弹性模量及泊松比等弹性力学参数的尺寸效应; (4) 剪切带倾角及峰后应力(或荷载)-应变(或变形)曲线的尺寸效应^[4~10]等。

在峰后应力-应变曲线的尺寸效应研究方面, 人

收稿日期: 2003-04-13

基金项目: 国家自然科学基金青年基金项目(编号: 50309904)。

作者简介: 王学滨, 男, 1975年生, 讲师, 博士生, 主要从事非均质材料(岩石、混凝土及金属)变形、破坏及稳定性理论研究及数值计算工作。

们关注最多的是单轴压缩条件下轴向应力-轴向应变曲线的尺寸效应^[10]。大量的研究表明：在应变软化阶段该曲线与试件的高度有关^[10]。在单轴压缩条件下，岩石试件一般都要发生侧向膨胀变形。轴向应力-侧向应变曲线（或轴向应力-环向应变曲线，下同）是否具有类似于轴向应力-轴向应变曲线的尺寸效应的问题呢？本文拟初步回答这一被长期忽视的问题。

本文根据不同尺寸试件的轴向应力-轴向应变曲线，确定出各种试件的剪切带条数，再利用文献[11]中的理论公式，求出了不同宽度试样的轴向应力-侧向应变曲线。当宽试件及窄试件在局部化启动后在试件内部出现一条剪切带时，研究了轴向应力-侧向应变曲线的尺寸效应及弹性回跳。

2 尺寸效应

在局部化启动后，当宽试件及窄试件在试件内部都出现一条剪切带时，为研究试件宽度对侧向应变的影响规律，参数取值如下：抗压强度 $\sigma_c = 40 \text{ MPa}$ ，岩石材料的内部长度参数 $l = 0.001 \text{ m}$ ，泊松比 $\nu = 0.25$ ，剪切降模量 $\lambda = 5 \text{ GPa}$ ，剪切带倾角 $\alpha = 30^\circ$ ，峰值应力所对应的应变 $\varepsilon_c = \sigma_c / E = 0.002$ 。不同试件宽度对侧向变形的影响规律见图 1。由此可见，随着试件宽度的增加，应变软化阶段轴向应力-侧向应变曲线越陡；当宽度较大时，该曲线将出现弹性失稳回跳。

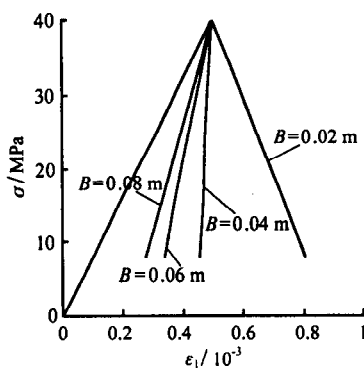


图 1 宽度对侧向变形的影响

Fig.1 Effect of width of specimen on post-peak lateral strain

宽试件及窄试件的局部化启动后，当试件内部出现不同条剪切带时，应变软化阶段轴向应力-侧向应变曲线将如何呢？要回答这一问题，就要首先确定宽试件及窄试件各自的剪切带条数。关于这一问题，很难在以往的实验及数值研究成果中找到规律性的结论。为此，本文作者利用文献[11]中公式

(22)，对不同宽度的轴向应力-轴向应变曲线进行回归，得到了宽试件及窄试件各自的剪切带条数。并由此分析了实际轴向应力-侧向应变曲线的变化规律。

图 2 中曲线为 Hudson 等对大理岩的实验结果^[5]，这些实验结果被广泛承认及引用，弹性及应变软化阶段的直线为采用文献[11]中公式 (22) 得到的理论结果。这里作了两点假设：(1) 不同尺寸的试件的剪切带条数是整数；(2) 峰值应力前的应力-应变关系满足线弹性虎克定律。

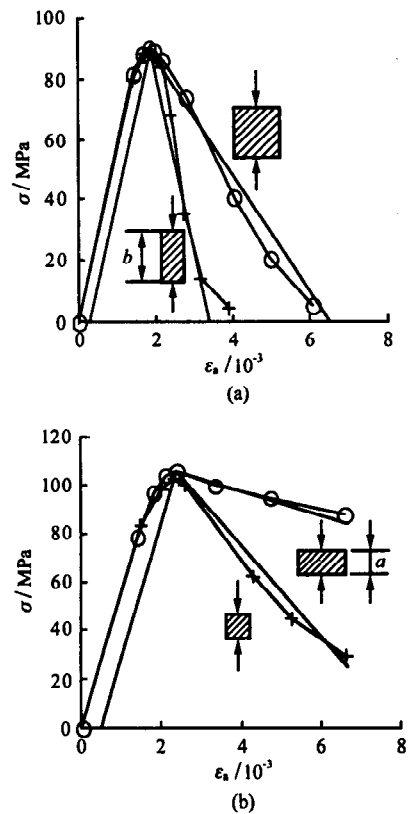


图 2 不同宽度试件的轴向应力-应变实验及理论曲线
Fig.2 Experimental and theoretical results for complete axial stress-strain curves of specimens with the same width

在弹性阶段

$$\sigma = E \varepsilon_a \tag{1}$$

在应变软化阶段^[11]，有

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon_a} = \left(\frac{1}{E} - \frac{w'_i \sin \alpha \cos^2 \alpha}{cL} \right)^{-1} \tag{2}$$

式中 $i=1, 2$ ， $i=1$ 是指高宽比为 2:1 的试件， $i=2$ 是指高宽比为 1:1 的试件； $L=5 \text{ cm}$ ； w'_i 为等效剪切带宽度^[11]， $w'_i = n_i w = 2n_i \pi l$ ，其中取 $n_i = 1$ 。由于试件在峰后的变形为 I 类行为，因此，存在

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon_a} < 0 \tag{3}$$

令上式的绝对值为 λ'_i , $A = \sin\alpha \cos^2\alpha (cL)^{-1}$, $B = E^{-1}$, 则有

$$w'_i = \frac{1 + B\lambda'_i}{A\lambda'_i} \quad (4)$$

各试件的相对尺寸见图 2, 其中 a 大致为 5 cm, b 大致为 10 cm. 现在来分析图 2 (a) 的情形 (图 2 (b) 是类似的), 在弹性阶段利用式 (4) 可以得到

$$\frac{1}{n_2} = \frac{w'_1}{w'_2} = \frac{1 + B\lambda'_1 \lambda'_2}{1 + B\lambda'_2 \lambda'_1} \quad (5)$$

有关参数取值如下: 弹性模量 $E = 55 \text{ GPa}$, λ'_i 的值由图 2 (a) 中实验曲线软化段斜率的绝对值的平均值确定, $\lambda'_1 = 59.5 \text{ GPa}$, $\lambda'_2 = 19.4 \text{ GPa}$, 岩石材料内部长度参数 $l = 0.001 \text{ m}$ 及抗压强度 $\sigma_c = 89.4 \text{ MPa}$. 由此可以确定 n_2 的值大致为 2. 也就是说, 如果高宽比为 2:1 的试件的剪切带条数为 1, 则高宽比为 1:1 的试件的剪切带条数为 2.

同理, 对图 2 (b) 进行类似的分析, 参数取值如下: $\sigma_c = 106 \text{ MPa}$, $\lambda'_1 = 5.13 \text{ GPa}$, $\lambda'_2 = 1.89 \text{ GPa}$, 其它参数同上. 可以确定 n_2 的值大致为 3. 也就是说, 如果高宽比为 1:1 的试件的剪切带条数为 1, 则高宽比为 1:0.5 的试件的剪切带条数为 3.

在应变软化阶段, 高宽比为 2:1 的试件的剪切带条数与高宽比为 1:1 的试件的剪切带条数有什么关系呢? 如果确定了这一关系, 那么, 另外两个试件的剪切带条数就可以完全确定了. 为了确定此关系, 将上述两个试件的轴向应力-轴向应变曲线绘于同一图中, 再采用式 (1) 及式 (2) 进行回归处理, 有关参数取值如下: 岩石材料内部长度参数 $l = 0.001 \text{ m}$, 弹性模量 $E = 55 \text{ GPa}$, 泊松比 $\nu = 0.25$, 剪切降模量 $\lambda = 0.73 \text{ GPa}$, 两试件高度 $L_1/L_2 = 10/5 = 2$, 抗压强度 σ_c 分别为 87.5, 100.1 MPa, $n_1 = n_2 = 1$.

理论与实验结果对比见图 3. 由此可见, 高宽比为 2:1 的试件的剪切带条数与高宽比为 1:1 的试件的剪切带条数是相同的, 假设均为 1 条. 因此, 图 2 (a) 中高宽比为 1:1 的试件的剪切带条数为 2, 而图 2 (b) 中高宽比为 1:0.5 的试件的剪切带条数为 3.

下面可以利用文献[11]中提出的式 (15) 来计算轴向应力-侧向应变曲线. 将文献[11]中式 (15) 改写为

$$\varepsilon_h = \nu \frac{\sigma}{E} + 2n_i \pi l \sin^2 \alpha \cos \alpha \frac{\sigma_c - \sigma}{cB_i} \quad (6)$$

式中 n_i , B_i 为不同宽度试件的剪切带条数及宽

度, 对于图 2 (a), $B_1 = 5 \text{ cm}$, $B_2 = 10 \text{ cm}$, $n_1 = 1$ 及 $n_2 = 3$. 对于图 2 (b), $B_1 = 5 \text{ cm}$, $B_2 = 10 \text{ cm}$, $n_1 = 1$ 及 $n_2 = 2$. 根据式 (6), 得到的轴向应力-侧向应变曲线见图 4.

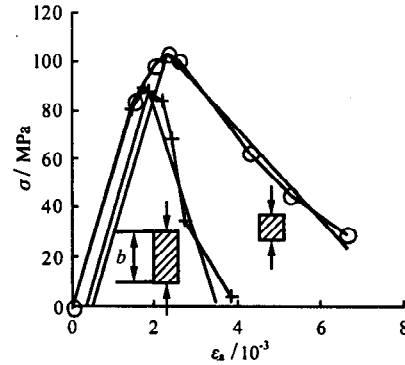


图 3 不同试件高度的应力-应变曲线的实验及理论结果
Fig.3 Experimental and theoretical results for complete stress-strain curves for different lengths of specimens

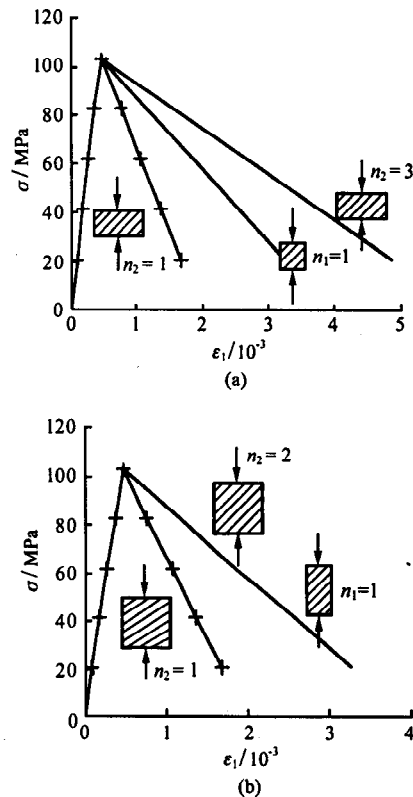


图 4 轴向应力-侧向应变曲线的理论结果
Fig.4 The theoretical results for axial stress-lateral strain curves for different widths of specimens

图 4 (a) 中带 “+” 符号的直线为当剪切带条数为 1 时高宽比为 1:2 的试件的结果. 图 4 (b) 中带 “+” 符号的直线为当剪切带条数为 1 时高宽比为 1:1 的试件的结果. 由于这两种情况剪切带条数均为 1, 因此是不合理的 (在轴向应力-应变曲线上

不可能与实验结果吻合),在此一并绘出的目的是和正确情形作一比较。

由此可见:(1)对于图 2(a)的情形,随着试件宽度的增加,则轴向应力-侧向应变曲线变缓;(2)对于图 2(b)的情形,轴向应力-侧向应变曲线不随着试件宽度而改变。(3)剪切带条数 n_i 与试件宽度 B_i 之比是决定轴向应力-侧向应变曲线特征的关键指标。若该比率为常量,则轴向应力-侧向应变曲线不具有尺寸效应,即

$$\frac{n_i}{B_i} = \text{Const.} \quad (7)$$

3 讨论

3.1 侧向塑性变形的原因

本文中的塑性侧向变形(位移或应变)是由剪切局部化而引起的。轴向劈裂也会引起侧向变形的增加,但这种轴向劈裂却不会改变轴向的位移。因此,由轴向应力-应变曲线反算出的轴向应力-侧向应变曲线中也不包括轴向劈裂的影响。

3.2 尺寸效应的普遍性

严格地讲,满足式(7)比较困难。因此,通常轴向应力-侧向应变曲线具有尺寸效应。该曲线的软化段不能被视为岩石材料的本构特性,而是本构特性与试件几何尺寸的共同作用结果。

3.3 理论上侧向变形的弹性回跳是存在的

众多文献表明,在软化段单轴压缩准脆性材料的轴向应力-应变曲线可能呈现 II 类变形行为。此外,在单轴拉伸、扭转及三点弯曲试验中这种弹性回跳现象也可以被观测到。然而,限于作者掌握的资料,对于轴向应力-侧向应变曲线发生回跳的实验结果尚未见报道。其原因之一可能是:较大的侧向变形量使弹性回跳不再发生。

4 结语

提出了利用不同尺寸试件的轴向应力-应变曲线得到轴向应力-侧向应变曲线的一种方法。剪切带条数与试件宽度之比是决定轴向应力-侧向应变曲线特征的关键指标。若该比率为常量,则轴向应力-侧向应变曲线不具有尺寸效应。

在局部化启动后,当宽试件和窄试件在试件内部都出现一条剪切带时,随着试件宽度的增加,应变软化阶段轴向应力-侧向应变曲线会更陡,甚至会出现回跳现象。轴向应力-侧向应变曲线尺寸效应的

原因是局部化,局部化并非总引起尺寸效应。研究轴向应力-侧向应变曲线尺寸效应的方法,同样可用于轴向应力-环向应变曲线的尺寸效应问题。

参 考 文 献

- [1] 刘宝琛, 张家生, 杜齐中等. 岩石抗压强度的尺寸效应[J]. 岩石力学与工程学报, 1998, 17(6): 611-614.
- [2] Van M R A, Van J G M. Experimental investigation of size effect in concrete and sandstone under uniaxial tension[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2000, 65: 165-188.
- [3] Bazant Z P, Xiang Y Y. Size effect in compression fracture: splitting crack band propagation[J]. *Journal of Engineering Mechanics, American Society of Civil Engineering*, 1997, 123(2): 162-171.
- [4] Jansen D C, Shah S P. Effect of length on compressive strain softening of concrete[J]. *Journal of Engineering Mechanics, American Society of Civil Engineering*, 1997, 123(1): 25-35.
- [5] Hudson J A, Crouch S L, Fairhurst C. Soft, stiff and servo-controlled testing mechanics: a review with reference to rock failure[J]. *Engineering Geology*, 1972, 6: 155-189.
- [6] 王学滨, 潘一山, 于海军. 考虑塑性应变率梯度的单轴压缩岩样轴向响应[J]. 岩土力学, 2003, 24(6): 943-946.
- [7] 王学滨, 唐巨鹏, 张智慧等. 基于应变梯度塑性理论的直接剪切试验尺寸效应、剪切变形及扩容分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(7): 1095-1099.
- [8] 王学滨, 潘一山. 剪切带倾角的尺度律与局部化启动跳跃稳定研究[J]. 岩土力学, 2002, 23(4): 446-449.
- [9] 王学滨, 潘一山. 岩石试件尺寸效应的塑性剪切应变梯度模型[J]. 岩土工程学报, 2001, 23(6): 711-713.
- [10] 王学滨, 潘一山, 杨小彬. 准脆性材料试件应变软化尺度效应理论研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2003, 22(2): 188-191.
- [11] 王学滨, 潘一山. 基于梯度塑性本构理论的岩样侧向变形分析, 第一部分: 基本理论及本构参数对侧向变形的影响[J]. 岩土力学, 2004, 24(6): 904-908.