第 23 卷 第 1 期
2004 年 1 月
岩石力学与工程学报
Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering
23(1)：12～16
Jan.，2004

多体系统非连续变形的弹性及弹塑性分析方法(I)——基本原理*

黎 勇[1,2] 冯夏庭[1] 栾茂田[2] 王泳嘉[1]
([1]东北大学资源与土木学院 沈阳 110006) ([2]大连理工大学土木水利学院及海岸和近海工程国家重点实验室 大连 116024)

摘要 非连续变形是多体系统的一个重要特性。从一般的平面问题出发，建立了多体系统的非连续变形分析的分区参变量最小势能原理，阐明了其理论基础，并推导了多体系统的非连续变形的弹性和弹塑性分析的整体控制方程，探讨了其求解的数值算法。该方法能够仿真模拟多体系统的变形和应力，不仅能够对多体系统进行静、动力耦合分析，而且还能够逐步模拟与预测多体系统的变形与应力响应及接触界面上的接触应力和相对运动等复杂的非线性过程。

关键词 固体力学，多体系统，非连续变形，弹性分析，弹塑性分析，广义有限单元，接触力元
分类号 O 34，O 242 **文献标识码** A **文章编号** 1000-6915(2004)1-0012-06

ELASTIC AND ELASTOPLASTIC ANALYSIS METHODS OF DISCONTINUOUS DEFORMATION FOR MULTI-BODY SYSTEM(I) —— FUNDAMENTALS

Li Yong[1]，Feng Xiating[1]，Luan Miaotian[2]，Wang Yongjia[1]
([1]*College of Resources and Civil Engineering，Northeastern Univesity，Shengyang* 110006 China)
([2]*Department of Civil Engineering and State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering，Dalian University of Technology，Dalian* 116024 *China*)

Abstract Discontinuous deformation is a fundamental character of multi-body system. For the general plane problem，divisional parameter principle of minimum potential energy is employed to establish the computational model for discontinuous deformation analysis of multi-body system in this paper. Mathematical formulations of global controlling equations of elastic and elastoplastic analysis of discontinuous deformation of multi-body system are presented and the numerical solution approach is developed. The mothod can not only perform both static and dynamic coupling analysis，but also conduct step-by-step simulation and prediction of deformations and stresses of multi-body system together with complex nonlinear process such as contact stress and relative movement along contact interfaces. The theoretical basis is established for numerical model of discontinuous deformation computational mechanics.

Key words solid mechanics，multi-body system，discontinuous deformation，elastic analysis，elastoplastic analysis，generalized finite element，contact force element

2002 年 3 月 8 日收到初稿，2003 年 5 月 25 日收到修改稿。
* 国家重点基础研究发展规划(2002CB412708)、教育部优秀青年教师奖励计划、霍英东教育基金资助项目(71048)、国家自然科学基金(10172022)与大连理工大学青年教师培养基金资助项目。
作者 黎 勇 简介：男，32 岁，博士，于 2000 年 12 月～2003 年 10 月在东北大学从事博士后研究，现任大连理工大学土木水利学院岩土工程研究所讲师，主要从事计算岩土力学与工程科学非线性计算等方面的研究工作。E-mail：youngliscy@sohu.com。

1 前　言

随着科学技术和重大工程建设的发展，在岩土工程和材料科学等领域经常遇到由不同特性的物体所构成的复杂多体系统。关于多体系统性能的研究已成为当前工程科学研究中的重要课题之一，而目前研究主要集中在刚性多体系统[1~4]和刚柔性耦合多体系统[5~8]；对于由刚体、弹性体和弹塑性体构成的混合复杂多体系统，缺乏深入的研究。为此笔者试图开展这方面的探索，在所建立的广义有限单元和接触力元[9]的基础上，基于离散多体系统的分区连续介质力学和子区间非连续性接触力元，提出一种新的适用于多体系统弹性及弹塑性分析的数值模拟方法。分区参变量变分原理[10]是解决边界待定问题的一种有效的数学方法，不仅可以处理摩擦接触问题，而且还可以处理材料的非线性或弹塑性问题。本文据此分别考虑了材料的线弹性本构关系与弹塑性本构关系，建立了多体系统非连续变形的弹性及弹塑性分析的分区参变量最小势能原理，系统地阐述了多体系统非连续变形的弹性和弹塑性分析原理，给出了其整体控制方程的数学列式，并探讨了其数值求解方法。

2 平面问题边值方程的一般形式

对于平面弹性边值问题，假定所研究的多体系统由m个物体构成。已知时刻t的系统构形为Ω，每个物体的构形为Ω_i，边界为$S(\Omega_i)=S_i^u\cup S_i^q\cup S_i^c$，其中，$S_i^u$为位移边界，$S_i^q$为外力边界，$S_i^c$为接触边界，$\Omega=\sum_{i=1}^{m}\Omega_i\,(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$，$S(\Omega)=\bigcup_{i=1}^{m}S(\Omega_i)$。该边值问题可表述为，在给定的边界条件下，求解$t+\Delta t$时刻多体系统的构形，即确定应力函数向量增量$[\sigma_x(x,\ y)\ \sigma_y(x,\ y)\ \gamma(x,\ y)]^{\mathrm T}$及位移函数向量增量$[u_x(x,\ y)\ \ u_y(x,\ y)]^{\mathrm T}$和界面接触力向量增量$[\sigma_{\mathrm n}\ \ \tau_{\mathrm s}]^{\mathrm T}$，待定变量所应满足的基本控制方程包括：

(1) 力学上的动力平衡增量方程

$$\widetilde{\boldsymbol B}^{\mathrm T}\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y}\right)\boldsymbol\sigma_i=\boldsymbol b_i-\rho_i\boldsymbol a_i \tag{1}$$

其中，

$$\widetilde{\boldsymbol B}(\alpha,\ \beta)=\begin{bmatrix}\alpha & 0 & \beta\\ \beta & \alpha & 0\end{bmatrix}^{\mathrm T},\quad \boldsymbol\sigma_i=\{\sigma_{ix}\ \sigma_{iy}\ \tau_{ixy}\}^{\mathrm T},$$

$$\boldsymbol b_i=\{b_{ix}\ b_{iy}\}^{\mathrm T},\quad \boldsymbol a_i=\{a_{ix}\ a_{iy}\}^{\mathrm T},\quad \boldsymbol v_i=\{v_{ix}\ v_{iy}\}^{\mathrm T}。$$

式中：$\boldsymbol b_i$，$\boldsymbol v_i$和$\boldsymbol a_i$分别为物体i的体积力密度增量，速度增量和加速度增量；ρ_i为物体的质量密度。注意$\boldsymbol v_i=\dot{\boldsymbol u}_i$，$\boldsymbol a_i=\dot{\boldsymbol v}_i=\ddot{\boldsymbol u}_i$。

(2) 运动学上的几何增量方程

任何物体内任意一点的几何连续性增量方程可表述为

$$\boldsymbol\varepsilon_i=-\widetilde{\boldsymbol B}\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y}\right)\boldsymbol u_i \tag{2}$$

(3) 物理学上的增量本构方程

当材料为线弹性时，其本构关系可表示为

$$\boldsymbol\sigma_i=\boldsymbol D_i\boldsymbol\varepsilon_i \tag{3}$$

当材料为理想弹-塑性时，其本构关系可表述如下：

$$\boldsymbol\sigma_i=\boldsymbol D_i\left(\boldsymbol\varepsilon_i-\boldsymbol\varepsilon_i^{\mathrm p}\right) \tag{4a}$$

$$f_i^{\mathrm p}\left(\boldsymbol\sigma_{ii}+\boldsymbol\sigma_i,\ \boldsymbol\varepsilon_{ii}^{\mathrm p}+\boldsymbol\varepsilon_i^{\mathrm p},\ \boldsymbol\kappa_i^{\mathrm p}\right)\leqslant 0 \tag{4b}$$

$$\boldsymbol\varepsilon_i^{\mathrm p}=\left(\partial g_i^{\mathrm p}/\partial\sigma_i\right)^{\mathrm T}\left(\delta_i^{\mathrm p}-\delta_{ii}^{\mathrm p}\right) \tag{4c}$$

$$\delta_i^{\mathrm p}\begin{cases}\geqslant 0 & \text{当 } f_i^{\mathrm p}=0\text{ 时}\\ =0 & \text{当 } f_i^{\mathrm p}<0\text{ 时}\end{cases} \tag{4d}$$

式中：$\boldsymbol D_i$为物体的弹性本构系数矩阵，对于线弹塑性材料，可由杨氏模量E_i和泊松比u_i来表达；$f_i^{\mathrm p}$和$g_i^{\mathrm p}$分别为塑性屈服函数和塑性势函数；$\boldsymbol\varepsilon_i^{\mathrm p}$为塑性应变增量；$\delta_{ii}^{\mathrm p}$和$\delta_i^{\mathrm p}$分别为$t$和$t+\Delta t$时刻的塑性参数；$\boldsymbol k_i^{\mathrm p}$为反映变形历史的强化参数。

(4) 多体间接触界面的本构关系

以物体i和物体j相互接触为例，$S_{ij}^{\mathrm c}$表示其间接触界面，$\boldsymbol p_{iij}^{\mathrm c}$表示$t$时刻的接触力，$\boldsymbol p_{ij}^{\mathrm c}$表示接触力增量，$\boldsymbol g_{iij}^{\mathrm c}$表示$t$时刻两物体间接触点的相对距离，$\boldsymbol g_{ij}^{\mathrm c}$表示两物体间接触点的相对距离增量，则有

$$f_{\mathrm g}\left(\boldsymbol g_{ij}^{\mathrm c}+\boldsymbol g_{iij}^{\mathrm c}\right)\cdot f_{\mathrm p}\left(\boldsymbol p_{iij}^{\mathrm c}+\boldsymbol p_{ij}^{\mathrm c}\right)=0 \tag{5a}$$

其中，

$$f_{\mathrm g}\left(\boldsymbol g_{ij}^{\mathrm c}+\boldsymbol g_{iij}^{\mathrm c}\right)\geqslant 0 \tag{5b}$$

$$f_{\mathrm p}\left(\boldsymbol p_{iij}^{\mathrm c}+\boldsymbol p_{ij}^{\mathrm c}\right)\leqslant 0 \tag{5c}$$

$$\boldsymbol g_{ij}^{\mathrm c}=\left[g_{ij\mathrm n}^{\mathrm c}\ \ g_{ij\mathrm s}^{\mathrm c}\right]^{\mathrm T}=\left(-\boldsymbol L_i\boldsymbol u_i\ \ \boldsymbol L_i\boldsymbol u_j\right),\quad \boldsymbol L_i=\begin{bmatrix}n_{ix} & n_{iy}\\ -n_{iy} & n_{ix}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol p_{ij}^{\mathrm c}=$$

$$\left[\sigma_{ij\mathrm n}^{\mathrm c}\ \ \tau_{ij\mathrm s}^{\mathrm c}\right]^{\mathrm T}=-\boldsymbol L_j\widetilde{\boldsymbol B}^{\mathrm T}\left(n_{jx},\ n_{jy}\right)\boldsymbol\sigma_j=\boldsymbol L_i\widetilde{\boldsymbol B}^{\mathrm T}\left(n_{ix},\ n_{iy}\right)\boldsymbol\sigma_i。$$

式中：$f_g()$为流动距离函数，$f_p()$为屈服准则，L_i为物体 i 在接触界面上外法线方向向量。上式的物理意义表示当两物体间接触界面上应力未达到屈服条件时，其流动距离为零，即处于锁定状态；反之其流动距离大于或等于零，即处于分离或滑移状态。

(5) 边值条件

位移边界条件为

$$\boldsymbol{u}_i = \bar{\boldsymbol{u}}_i \qquad 在边界 S_i^u 上 \tag{6a}$$

应力边界条件为

$$\boldsymbol{p}_i = \widetilde{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}(n_{ix},\ n_{iy})\boldsymbol{\sigma}_i = -\bar{\boldsymbol{p}}_i \qquad 在边界 S_i^q 上 \tag{6b}$$

式中：$\boldsymbol{p}_i = [p_{ix}\ \ p_{iy}]^{\mathrm{T}}$，$\bar{\boldsymbol{p}}_i = [\bar{p}_{ix}\ \ \bar{p}_{iy}]^{\mathrm{T}}$为已知的面力；$n_{ix}$，$n_{iy}$为物体 i 边界面外法线方向相对于 x 与 y 的方向余弦。

3 弹性及弹塑性广义有限单元

根据广义有限单元的定义[9]，当其本构关系为弹性时可称为弹性广义有限单元，当其本构关系为弹塑性时可称为弹塑性广义有限单元。任意弹性及弹塑性广义有限单元 i 的位移插值函数(即其数学覆盖函数)一般表达式可表示为

$$\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{N}_i\boldsymbol{U}_i \tag{7}$$

式中：$\boldsymbol{N}_i$为位移插值形函数，$\boldsymbol{U}_i$为广义自由度。

对于任意弹性广义有限单元 i 的应力可表示为

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \boldsymbol{D}_i\boldsymbol{\varepsilon}_i \tag{8}$$

对于任意弹塑性广义有限单元 i 的应力有

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \boldsymbol{D}_i\left(\boldsymbol{\varepsilon}_i - \boldsymbol{\varepsilon}_i^{\mathrm{p}}\right) \tag{9}$$

同时它必须满足式(4b)～(4d)的约束条件。这里，塑性本构关系采用Coulomb屈服准则及相应的流动法则，经线性化后表示为

$$\boldsymbol{M}_i^{\mathrm{p}}\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{E}_i\boldsymbol{U}_i - \boldsymbol{M}_i^{\mathrm{p}}\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{G}_i^{\mathrm{p}}\left(\boldsymbol{\delta}_i^{\mathrm{p}} - \boldsymbol{\delta}_{ti}^{\mathrm{p}}\right) + \boldsymbol{\lambda}_i^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{K}_i^{\mathrm{fp}} - \boldsymbol{M}_i^{\mathrm{p}}\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{ti} \tag{10a}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_i^{\mathrm{p}}\boldsymbol{\delta}_i^{\mathrm{p}} = 0\ ，\ \boldsymbol{\lambda}_i^{\mathrm{p}} \geqslant 0，\ \boldsymbol{\delta}_i^{\mathrm{p}} \geqslant 0 \tag{10b}$$

其中

$$\boldsymbol{M}_i^{\mathrm{p}} = \begin{bmatrix} 1-e_1 & -e_1 & -1-e_1 & -1-e_1 & -e_1 & 1-e_1 \\ -1-e_1 & -e_1 & 1-e_1 & 1-e_1 & -e_1 & -1-e_1 \\ 2e_0 & 4e_0 & 2e_0 & -2e_0 & -4e_0 & -2e_0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} e_3\ ，$$

$$\boldsymbol{G}_i^{\mathrm{p}} = \begin{bmatrix} 1-e_2 & -e_2 & -1-e_2 & -1-e_2 & -e_2 & -1-e_2 \\ -1-e_2 & -e_2 & 1-e_2 & 1-e_2 & -e_2 & -1-e_2 \\ 2e_0 & 4e_0 & 2e_0 & -2e_0 & -4e_0 & -2e_0 \end{bmatrix} e_3\ ，$$

$$\boldsymbol{E}_i = \iint_{\Omega_i} -\widetilde{\boldsymbol{B}}\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y}\right)\boldsymbol{N}_i\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \bigg/ \iint_{\Omega_i}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ ，$$

$$\boldsymbol{K}_i^{\mathrm{fp}} = \left[2c_i\ 2c_i\ 2c_i\ 2c_i\ 2c_i\ 2c_i\right]^{\mathrm{T}}\ ，$$

$$\boldsymbol{\delta}_i^{\mathrm{p}} = \left[\delta_{i1}^{\mathrm{p}}\ \delta_{i2}^{\mathrm{p}}\ \delta_{i3}^{\mathrm{p}}\ \delta_{i4}^{\mathrm{p}}\ \delta_{i5}^{\mathrm{p}}\ \delta_{i6}^{\mathrm{p}}\right]^{\mathrm{T}}\ ，$$

$$\boldsymbol{\lambda}_i^{\mathrm{p}} = \left[\lambda_{i1}^{\mathrm{p}}\ \lambda_{i2}^{\mathrm{p}}\ \lambda_{i3}^{\mathrm{p}}\ \lambda_{i4}^{\mathrm{p}}\ \lambda_{i5}^{\mathrm{p}}\ \lambda_{i6}^{\mathrm{p}}\right]^{\mathrm{T}}\ 。$$

式中：$e_1 = \sin\phi_i$；$e_2 = \psi\sin\phi_i$；$e_3 = 1/\cos\phi_i$；$e_0 = 1/\sqrt{3}$；λ_i^{p}为应力强度松弛变量，相当于剩余强度；ψ为膨胀因子，当$\psi = 1$时的流动法则是相关联的，当$\psi \neq 1$时为非关联的，特别地，当$\psi = 0$时为无塑性膨胀非关联的，$\psi < 0$时为塑性收缩非关联的。

4 弹性及弹塑性分析的理论基础

从虚功原理出发，通过定义势能泛函Π_{1i}，建立了非连续变形计算力学模型弹性分析的分区参变量最小势能变分原理，由此可得到多体系统的整体控制方程。

在多体系统实际物理剖分的基础上，用点、线和面将多体系统进行数学剖分而成为m个非连续子区之和，在每个子区上可根据实际需要构造广义有限单元，令其广义有限单元数为n_{ei}，各广义有限单元间的不连续面(接触面)可用接触力元来处理。令任意广义有限单元ij(表示第i个物体上的第j个单元，以下变量符号中采用相同的标记)的物理覆盖为A_{ij}，有$S(A_{ij}) = S_{ij}^u \cup S_{ij}^q \cup S_{ij}^c \cup \bar{S}_{ij}$，$S_{ij}^u$，$S_{ij}^q$，$S_{ij}^c$和$\bar{S}_{ij}$分别为位移边界、应力边界、接触边界和连续边界。假设在t时刻，非连续变形计算力学模型的离散系统的初始应力、初始应变、初始速度和初始加速度分别为$\boldsymbol{\sigma}_t$，$\boldsymbol{\varepsilon}_t$，$\boldsymbol{v}_t$和$\boldsymbol{a}_t$。在$\Delta t$时间内，系统所承受的体积力密度增量和外力增量分别为 $\boldsymbol{b}$ 和 $\bar{\boldsymbol{p}}$，发生的位移增量、速度增量、加速度增量、应力增量和应变增量分别为$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{\sigma}$和$\boldsymbol{\varepsilon}$。对系统施加任意小的虚位移$\delta\boldsymbol{u}$，对于任意广义有限单元ij，外力所作的虚功增量及虚应变能增量为

$$\delta W_{ij} = -\int_{\bar{S}_{ij}}\widetilde{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}(n_x,\ n_y)\boldsymbol{\sigma}_{ij}(\delta\boldsymbol{u}_{ij})^{\mathrm{T}}\mathrm{d}s + \int_{S_{ij}^q}\bar{\boldsymbol{p}}_{ij}(\delta\boldsymbol{u}_{ij})^{\mathrm{T}}\mathrm{d}s - \sum_{k=1,\,l=1}^{n}\ \sum_{k=i,\ \ l\neq j}^{n_{ek}}\int_{S_{ij}^u}\boldsymbol{L}_{ij}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_{ijkl}^{\mathrm{c}}(\delta\boldsymbol{u}_{ij})^{\mathrm{T}}\mathrm{d}s + \int_{A_{ij}}(\boldsymbol{b}_{ij} - \rho_i\boldsymbol{a}_{ij})(\delta\boldsymbol{u}_{ij})^{\mathrm{T}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{11a}$$

$$\delta \Pi_{ij} = -\int_{S_{ij}} \widetilde{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}(n_x,\ n_y)\sigma_{ij}(\delta \boldsymbol{u}_{ij})^{\mathrm{T}}\,\mathrm{d}s + \iint_{A_{ij}} \widetilde{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y}\right)\boldsymbol{\sigma}_{ij}(\delta \boldsymbol{u}_{ij})^{\mathrm{T}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{11b}$$

根据虚功原理，外力所作的虚功增量等于虚应变能增量，则有

$$\iint_{A_{ij}} (\delta \boldsymbol{u}_{ij})^{\mathrm{T}}\left[\widetilde{\boldsymbol{B}}\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y}\right)\sigma_{ij} - (\boldsymbol{b}_i - \rho_i \boldsymbol{a}_{ij})\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_{S_{ij}^{\mathrm{q}} \cup S_{ijj}^{\mathrm{c}}} (\delta \boldsymbol{u}_{ij})^{\mathrm{T}} \cdot \left(\widetilde{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}(n_x,\ n_y)\sigma_{ij} + \overline{\boldsymbol{P}}_{ij} - \sum_{k=1,\ l=1}^{n} \sum_{k=i,\ l\neq j}^{n_{ek}} \boldsymbol{L}_{ij}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{p}_{ijkl}^{\mathrm{c}}\right)\mathrm{d}s = 0 \tag{12}$$

由于虚位移 $\delta \boldsymbol{u}$ 是任意的，故由此可得到多体系统的动力平衡方程式(1)和力的边界条件式(6b)，说明虚功方程是系统平衡的充分条件。参照上面的虚功表达式，对于任意子区 i 定义势能泛函 Π_{1i} 为

$$\begin{aligned}\Pi_{1i} = {} & \sum_{j=1}^{n_{ei}} \iint_{A_{ij}} \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D}_{ij} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \\ & \sum_{j=1}^{n_{ei}} \iint_{A_{ij}} \boldsymbol{u}_{ij}^{\mathrm{T}}(\rho_i \boldsymbol{a}_{ij} - \boldsymbol{b}_i)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \\ & \sum_{j=1}^{n_{ei}} \int_{S_{ij}^{\mathrm{q}} \cup S_{ijj}^{\mathrm{c}}} \boldsymbol{u}_{ij}^{\mathrm{T}}\left(\overline{\boldsymbol{p}}_{ij} - \sum_{k=1,\ l=1}^{n} \sum_{k=i,\ l\neq j}^{n_{ek}} \boldsymbol{L}_{ij}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{p}_{ijkl}^{\mathrm{c}}\right)\mathrm{d}s - \\ & \sum_{j=1}^{n_{ei}^{\mathrm{p}}} \iint_{A_{ij}} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D}_{ij} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{\mathrm{p}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{13}$$

式中：第 1 项为子区 i 内的总的势能增量，第 2 项是塑性势能增量，第 3 项是外力和摩擦力势能增量。n_{ei} 为子区 i 的单元数，n_{ei}^{p} 为子区 i 的塑性单元数。注意到 $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = -\widetilde{\boldsymbol{B}}\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y}\right)\boldsymbol{N}_{ij}\boldsymbol{U}_{ij}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{G}_{ij}^{\mathrm{p}}(\boldsymbol{\delta}_{ij}^{\mathrm{p}} - \boldsymbol{\delta}_{tij}^{\mathrm{p}})$。虚功方程用增量泛函的一阶变分的驻值条件表示为

$$\begin{aligned}\delta \Pi_{1i} = {} & \delta \boldsymbol{U}_i^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{K}_i^{\mathrm{e}} \boldsymbol{U}_i + \boldsymbol{F}_{ai} - \boldsymbol{N}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D}_i \boldsymbol{G}_i^{\mathrm{p}}(\boldsymbol{\delta}_i^{\mathrm{p}} - \boldsymbol{\delta}_{ti}^{\mathrm{p}}) - \\ & \boldsymbol{C}_{\mathrm{R}i} \boldsymbol{R}_i - \boldsymbol{F}_{\mathrm{p}i} - \boldsymbol{F}_{\mathrm{b}i}]\end{aligned} \tag{14}$$

其中，

$$\boldsymbol{K}_i = \sum_{j=1}^{n_{ei}} \boldsymbol{K}_{ij}^{\mathrm{e}},\quad \boldsymbol{C}_{\mathrm{R}i} = \sum_{j=1}^{n_{ei}} \sum_{k=1,\ l=1}^{n} \sum_{k=i,\ l\neq j}^{n_{ek}} \boldsymbol{C}_{\mathrm{R}ijkl},$$

$$\boldsymbol{R}_i = \sum_{j=1}^{n_{ei}} \sum_{k=1\ l=1}^{n} \sum_{k=i,\ l\neq j}^{n_{ek}} \boldsymbol{R}_{ijkl},\quad \boldsymbol{C}_{\mathrm{R}ijkl} = -\int_{S_{ijkl}^{\mathrm{c}}} \boldsymbol{L}_{ij}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{N}_{ij}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{T}_{ijkl}\,\mathrm{d}s,$$

$$\boldsymbol{F}_{qi} = \sum_{j=1}^{n_{ei}} \boldsymbol{F}_{qij}^{\mathrm{e}},\quad \boldsymbol{F}_{ai} = \sum_{j=1}^{n_{ei}} \iint_{A_{ij}} \boldsymbol{N}_{ij}^{\mathrm{T}} \rho_i \boldsymbol{a}_{ij}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

式中：$\boldsymbol{u}_i$ 为自变函数，$\boldsymbol{R}_i$ 和 $\boldsymbol{\delta}_i^{\mathrm{p}}$ 为不参加变分的参变量，它们必须满足接触力元和弹塑性广义有限单元的约束条件。

泛函 Π_{1i} 的二阶变分为

$$\delta^2 \Pi_{1i} = (\delta \boldsymbol{U}_i)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K}_i \delta \boldsymbol{U}_i > 0 \tag{15}$$

于是多体系统非连续变形的弹性及弹塑性分析的分区参变量最小势能原理可以阐述为：在多体系统的当前构形和给定的外力增量作用下，对于任意子区 i 在满足位移边界条件的所有位移场中，其真实的位移使总势能增量泛函 Π_{1i} 取极小值，其中接触力增量及塑性乘子为不参加变分的参变量，必须满足接触力元和弹塑性广义有限单元的约束条件。这是多体系统非连续变形的弹性及弹塑性分析的理论基础，由此可推得多体系统的整体平衡方程，再加上接触力元[9]与弹性及弹塑性广义有限单元的状态控制方程，就可以得到多体系统非连续变形的弹性及弹塑性分析方法的整体控制方程。

5 非连续变形分析基本方程

通过分区参变量最小势能原理，利用 Newmark 时间积分增量格式，即 $\boldsymbol{a} = \overline{\alpha}\boldsymbol{u}/\Delta t - \overline{\alpha}\boldsymbol{v}_t/\Delta t - \frac{1}{2}\overline{\alpha}\boldsymbol{a}_t$ 和 $\boldsymbol{v} = \overline{\beta}\boldsymbol{u}/\Delta t - \overline{\beta}\boldsymbol{v}_t + \left(1 - \frac{1}{2}\overline{\beta}\right)\boldsymbol{a}_t \Delta t$，$\overline{\alpha} = 1/\alpha$，$\overline{\beta} = \beta/\alpha$，$\alpha$ 和 β 为积分参数。加上参变量的控制条件，可以得到如下非连续变形计算力学模型弹塑性分析的整体控制方程：

$$\boldsymbol{KU} - \boldsymbol{C}_{\mathrm{p}}(\boldsymbol{\delta}^{\mathrm{p}} - \boldsymbol{\delta}_t^{\mathrm{p}}) - \boldsymbol{C}_{\mathrm{R}}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F} \tag{16a}$$

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{\delta}^{\mathrm{c}} - (\boldsymbol{G}^{\mathrm{c}}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{G}_t^{\mathrm{c}}) = 0 \tag{16b}$$

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{c}}(\boldsymbol{R}_t + \boldsymbol{R}) - \boldsymbol{K}^{\mathrm{fc}} + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{c}} = 0 \tag{16c}$$

$$\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{c}}\boldsymbol{\delta}^{\mathrm{c}} = 0,\quad \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{c}} \geqslant 0,\quad \boldsymbol{\delta}^{\mathrm{c}} \geqslant 0 \tag{16d}$$

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{DEU} - \boldsymbol{M}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{DG}^{\mathrm{p}}(\boldsymbol{\delta}^{\mathrm{p}} - \boldsymbol{\delta}_t^{\mathrm{p}}) + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{K}^{\mathrm{fp}} - \boldsymbol{M}^{\mathrm{p}}\overline{\boldsymbol{\sigma}}_t \tag{16e}$$

$$\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{\delta}^{\mathrm{p}} = 0,\quad \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{p}} \geqslant 0,\quad \boldsymbol{\delta}^{\mathrm{p}} \geqslant 0 \tag{16f}$$

其中，

$$\boldsymbol{K} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{K}_i,\quad \boldsymbol{C}_{\mathrm{p}} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{C}_{\mathrm{p}i},\quad \boldsymbol{C}_{\mathrm{R}} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{C}_{\mathrm{R}i},\quad \boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i,$$

其他符号的表达式见文[9]。

方程(16)是弹塑性分析的整体控制方程，当不考虑式(16a)中的塑性项和式(16e)及式(16f)，即为弹性分析的整体控制方程，它是带有自由变量和等式约束的线性互补问题，下面将探讨其求解方法。

6 算法探讨

对于上面的方程组(16)，目前还没有有效的方法来直接求解，下面将其转化成标准线性互补问题，以便求解。

由式(16a)，可求得

$$U = K^{-1}\left[C_{\mathrm{p}}(\delta^{\mathrm{p}} - \delta_t^{\mathrm{p}}) + C_R R + F\right] \tag{17a}$$

将其代入式(16b)，可得到

$$R = K_{\mathrm{R}}[H\delta^{\mathrm{c}} - G^{\mathrm{c}}K^{-1}C_{\mathrm{p}}(\delta^{\mathrm{p}} - \delta_t^{\mathrm{p}}) - G^{\mathrm{c}}K^{-1}F - G_t^{\mathrm{c}}] \tag{17b}$$

式中：$K_{\mathrm{R}} = \left(G^{\mathrm{c}}K^{-1}C_{\mathrm{R}}\right)^{-1}$。

将上式代入式(16c)，可以得到

$$\lambda^{\mathrm{c}} + X_{\mathrm{cc}}\delta^{\mathrm{c}} + X_{\mathrm{cp}}\delta^{\mathrm{p}} = Y^{\mathrm{c}} \tag{17c}$$

式中：$X_{\mathrm{cc}} = M^{\mathrm{c}}K_{\mathrm{R}}H$，$X_{\mathrm{cp}} = -M^{\mathrm{c}}K_{\mathrm{R}}G^{\mathrm{c}}K^{-1}C_{\mathrm{p}}$，$Y^{\mathrm{c}} = K^{\mathrm{fc}} - M^{\mathrm{c}}R_t + M^{\mathrm{c}}K_{\mathrm{R}}\left(G^{\mathrm{c}}K^{-1}F + G_t^{\mathrm{c}}\right) + X_{\mathrm{cp}}\delta_t^{\mathrm{p}}$

将式(17a)和式(17b)代入式(16e)，整理可得

$$\lambda^{\mathrm{p}} + X_{\mathrm{pc}}\delta^{\mathrm{c}} + X_{\mathrm{pp}}\delta^{\mathrm{p}} = Y^{\mathrm{p}} \tag{17d}$$

式中：

$X_{\mathrm{pc}} = M^{\mathrm{p}}DEK^{-1}C_{\mathrm{R}}K_{\mathrm{R}}H$，$X_{\mathrm{pp}} = M^{\mathrm{p}}DEK^{-1}C_{\mathrm{p}} - M^{\mathrm{p}}DEK^{-1}C_{\mathrm{R}}K_{\mathrm{R}}G^{\mathrm{c}}K^{-1}C_{\mathrm{p}} - M^{\mathrm{p}}DG^{\mathrm{p}}$，$Y^{\mathrm{p}} = K^{\mathrm{fp}} - M^{\mathrm{p}}\overline{\sigma}_t - M^{\mathrm{p}}DEK^{-1}F + M^{\mathrm{p}}DEK^{-1}C_{\mathrm{R}}K_{\mathrm{R}}(G^{\mathrm{c}}K^{-1}F + G_t^{\mathrm{c}}) + X_{\mathrm{pp}}\delta_t^{\mathrm{p}}$。

联立式(17c)和式(17d)以及互补约束条件式(16d)和式(16f)，可以得到如下互补方程组：

$$\lambda + X\delta = Y \tag{18a}$$

$$\lambda\delta = 0 \tag{18b}$$

其中，

$$\lambda = \begin{Bmatrix}\lambda^{\mathrm{c}} \\ \lambda^{\mathrm{p}}\end{Bmatrix},\quad \delta = \begin{Bmatrix}\delta^{\mathrm{c}} \\ \delta^{\mathrm{p}}\end{Bmatrix},\quad X = \begin{bmatrix}X_{\mathrm{cc}} & X_{\mathrm{cp}} \\ X_{\mathrm{pc}} & X_{\mathrm{pp}}\end{bmatrix},\quad Y = \begin{Bmatrix}Y^{\mathrm{c}} \\ Y^{\mathrm{p}}\end{Bmatrix}$$

对于上面标准的线性互补问题，目前求解的方法有 Dantzig 提出的主元消去法和 Lemke 提出的互补旋转算法等，Lemke 算法计算稳定且效率高，因此这里采用该算法求解，并编制了计算程序。

7 结 论

本文在给出多体相互作用系统的平面弹性及弹塑性问题的一般边值方程的基础上，通过广义有限单元对其进行分区离散，单元(或物体)间的非连续界面用接触力元模拟。从虚功原理出发，建立了多体系统非连续变形的弹性及弹塑性分析方法的分区参变量最小势能原理，从而阐明了其理论基础，推导出了它的的整体控制方程，并给出了其求解算法。特别是弹塑性分析将接触非线性和局部区域的材料非线性(如弹塑性)耦合在一起，从而使得本文所提出的多体系统非连续变形的弹性及弹塑性非分析方法能够处理由不同特性的物体(如刚性体、弹性体和弹塑性体)所构成的复杂多体系统的弹性及弹塑性分析问题，并能够真实地再现多体系统相互作用的性态，直接给出多体间相互作用的接触力或应力。

非连续变形计算力学模型相对如离散单元法和有限单元法等传统的数值计算方法具有如下优点：(1) 能够处理多个不同特性的物体所组成的多体系统的静动力耦合分析。(2) 能够处理连续和非连续介质所组成的离散多体系统，系统的连续性与非连续性直接由相互接触界面的 Mohr-Coulomb 摩擦接触准则和相应的力学参数所控制。(3) 用数学规划求解多体系统的接触问题，在每一增量步内仅进行一次接触对的搜索与转换，大大减少了计算工作量。

下文笔者将通过具体的数值算例来探讨本文所提出的方法的应用。

参 考 文 献

1 洪嘉振，倪纯双. 变拓扑多体系统动力学的全局仿真[J]. 力学学报，1996，28(5)：633～637

2 刘延柱. 完全笛卡儿坐标描述的多体系统动力学[J]. 力学学报，1997，29(1)：84～94

3 潘振宽，孙红旗，臧宏文等. 多体系统动力学微分/代数方程组修正的 QR 法[J]. 青岛大学学报，1996，11(4)：37～42

4 陆晓敏. 拉格朗日方程的符号生成及其应用[J]. 河海大学学报，1996，24(6)：39～43

5 洪嘉振，蒋丽忠. 动力刚化与多体系统刚-柔耦合动力学[J]. 计算力学学报，1999，(3)：295～301

6 胡振东，洪嘉振. 刚-柔耦合系统动力学建模及分析[J]. 应用数学和力学，1999，20(10)：1 087～1 093

7 Valembois R E，Fisette P，Samin J C. Comparison of various techniques for modelling flexible beam in multibody dynamics[J]. Nonlinear Dynamics，1997，12(4)：367～397

8 Bauchau O A. On the modeling of prismatic joints in flexible multi-body systems[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering，2000，181(1～3)：87～105

9 黎 勇. 非连续变形计算力学模型及其在岩土工程中的应用[博士学位论文][D]. 大连：大连理工大学，2000

10 钟万勰，张洪武，吴承伟. 参变量变分原理及其在工程中的应用[M]. 北京：科学出版社，1997