

# 平面 P 波入射下地下洞室群动应力集中问题解析解

## An analytical solution for dynamic stress concentration of underground cavities under incident plane P waves

梁建文<sup>1</sup>, 张 浩<sup>1</sup>, Vincent W LEE<sup>2</sup>

(1. 天津大学 土木工程系, 天津 300072; 2. University of Southern California, Los Angeles, CA 90089)

**摘 要:** 采用波函数展开法给出了半空间中洞室群在平面 P 波入射下动应力集中问题的一个解析解, 数值结果表明, 当洞室之间距离较近时, 洞室之间的相互作用对地下洞室群的动应力集中具有显著的放大作用, 动应力集中系数可能达到单个洞室的 3.5 倍以上, 动应力集中系数峰值位于两个洞室相对的区域。

**关键词:** 地下洞室群; 动力响应; 平面 P 波; 动应力集中; 散射; 解析解

**中图分类号:** TU 352.1

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1000 - 4548(2004)06 - 0815 - 05

**作者简介:** 梁建文(1965 - ), 男, 天津大学教授, 博士生导师。

LIANG Jian-wen<sup>1</sup>, ZHANG Hao<sup>1</sup>, Vincent W LEE<sup>2</sup>

(1. Department of Civil Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China; 2. University of Southern California, Los Angeles, CA 90089, USA)

**Abstract:** An analytical solution for dynamic stress concentration of underground cavities under incident plane P waves is given by wave function expansion method. The numerical results show that interaction between two cavities greatly amplifies the dynamic stress concentration, and the dynamic stress concentration may reach to 3.5 times that in single cavity case, and the stress peaks are located between the two cavities.

**Key words:** underground group cavities; dynamic response; plane P waves; dynamic stress concentration; scattering; analytical solution

## 0 引 言

我国的海城地震和唐山地震以及日本的阪神地震等许多地震经验表明, 强烈地震作用会造成地下洞室结构的破坏<sup>[1-4]</sup>。由于我国大部分地区为地震设防区, 很多地下洞室工程必须建在高烈度地震区, 然而, 国内外现有抗震规范关于地下洞室等地下结构的条文都十分简略, 难以适应高烈度地震区地下洞室建设的发展<sup>[5, 6]</sup>, 加之随着地下洞室施工技术的发展, 洞室的横断面越来越大, 两个及两个以上洞室组成的洞室群工程也越来越普遍, 使得地下洞室群的抗震设计及其安全性评价成为工程设计中亟待解决的重要问题。

地下洞室(群)抗震问题的求解可采用数值法和解析法。数值法包括有限差分法、有限元法、边界法等, 解析法即波函数展开法。数值法的显著特点是可适用于任意形状洞室, 而解析法在问题本质分析方面有着数值法不可替代的作用, 而且解析法还可用来检验数值法的精度。20 世纪 70 年代初, Pao 和 Mow<sup>[7]</sup>采用波函数展开法开创性地研究了无限空间中单个洞室在弹性波入射下的动应力集中问题。随后, Lee<sup>[8]</sup>、Lee 和 Trifunac<sup>[9]</sup>将解答推广到半空间, 研究了半空间中单个洞室对 SH 波的散射问题, 这是因为地下洞室实际上是位于半空间的, 而且多属于浅埋。Balendra 等<sup>[10]</sup>进一步研究了双隧道在 SH 波作用下的动力响

应, 发现两个隧道之间存在相互作用。对于 P 和 SV 波, 因波在散射时的波型转换, 问题比 SH 波要复杂得多, 直到最近, Lee 等<sup>[11-13]</sup>采用大圆弧假定方法给出了半空间中单个洞室对 P 和 SV 波的散射解析解。

本文采用波函数展开法给出了半空间中洞室群在平面 P 波入射下动应力集中问题的一个解析解, 进一步扩展了半空间中单个洞室的解<sup>[12]</sup>, 并研究了洞室之间相互作用对动应力集中的影响。研究表明, 洞室之间的相互作用对地下洞室群的动应力集中具有显著的放大作用。为节省篇幅而又不失一般性, 本文以两个洞室为例进行分析, 多个洞室情况可由本文直接推广。

## 1 模 型

图 1 所示模型包括两个镶嵌在弹性均匀和各向同性半空间中的圆形洞室。洞室之间水平距离为  $d_1$ , 半径和埋深分别均为  $b_1$  和  $h_1$ , 半空间介质由拉梅常数  $\lambda_s$  和  $\mu_s$  以及质量密度  $\rho_s$  确定, 相应的纵波和横波波速分别为  $\alpha_s$  和  $\beta_s$ 。

一频率为  $\omega$  的平面 P 波以角度  $\theta_a$  入射, 在  $o_1$  坐标系中入射 P 波和反射 P 波以及反射 SV 波势函数可以分别表示为如下级数形式:

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(50378063); 教育部优秀青年教师资助计划

**收稿日期:** 2003 - 12 - 05

$$\phi_{i+r}^{(1)}(r_1, \theta_1) = \sum_{n_1=0}^{+\infty} J_{n_1}(k_{sa}r_1)(A_{01,n_1} \cos n_1\theta_1 + B_{01,n_1} \sin n_1\theta_1), \quad (1)$$

$$\psi_r^{(1)}(r_1, \theta_1) = \sum_{n_1=0}^{+\infty} J_{n_1}(k_{s\beta}r_1)(C_{01,n_1} \sin n_1\theta_1 + D_{01,n_1} \cos n_1\theta_1), \quad (2)$$

式中  $k_{sa} = \omega/\alpha_s$  为纵波波数;  $k_{s\beta} = \omega/\beta_s$  为横波波数,  $J_n(x)$  为第一类 Bessel 函数;  $\theta_\beta$  为 SV 波的反射角,  $\theta_\alpha$  和  $\theta_\beta$  满足  $\sin \theta_\alpha / \alpha_s = \sin \theta_\beta / \beta_s$ ; 时间因子  $\exp(-i\omega t)$  已省去; 系数

$$\begin{cases} A_{01,n_1} \\ B_{01,n_1} \end{cases} = \varepsilon_{n_1} i^{n_1} \begin{cases} \cos n_1\theta_\alpha \\ \sin n_1\theta_\alpha \end{cases} \left\{ \pm (-1)^{n_1} \exp(-ik_{sa}h_1 \cos \theta_\alpha) \right. \\ \left. k_{11} \exp(ik_{sa}h_1 \cos \theta_\alpha) \right\}, \quad (3)$$

$$\begin{cases} C_{01,n_1} \\ D_{01,n_1} \end{cases} = \varepsilon_{n_1} i^{n_1} \begin{cases} \sin n_1\theta_\beta \\ \cos n_1\theta_\beta \end{cases} \left\{ k_{12} \exp(ik_{s\beta}h_1 \cos \theta_\beta) \right\}, \quad (4)$$

当  $n=0$  时,  $\varepsilon_n = 1$ ; 而当  $n \geq 1$  时,  $\varepsilon_n = 2$ , 下同。反射系数

$$k_{11} = \frac{\sin 2\theta_\alpha \sin 2\theta_\beta - (\alpha_s / \beta_s)^2 \cos^2 2\theta_\beta}{\sin 2\theta_\alpha \sin 2\theta_\beta + (\alpha_s / \beta_s)^2 \cos^2 2\theta_\beta} \quad \text{和}$$

$$k_{12} = \frac{-2 \sin 2\theta_\alpha \cos 2\theta_\beta}{\sin 2\theta_\alpha \sin 2\theta_\beta + (\alpha_s / \beta_s)^2 \cos^2 2\theta_\beta}. \quad (5)$$

同样, 在  $o_2$  坐标中入射 P 波和反射 P 波以及反射 SV 波势函数可以分别表示为如下级数形式:

$$\phi_{i+r}^{(2)}(r_2, \theta_2) = \sum_{n_2=0}^{+\infty} J_{n_2}(k_{sa}r_2)(A_{02,n_2} \cos n_2\theta_2 + B_{02,n_2} \sin n_2\theta_2), \quad (6)$$

$$\psi_r^{(2)}(r_2, \theta_2) = \sum_{n_2=0}^{+\infty} J_{n_2}(k_{s\beta}r_2)(C_{02,n_2} \sin n_2\theta_2 + D_{02,n_2} \cos n_2\theta_2), \quad (7)$$

式中

$$\begin{cases} A_{02,n_2} \\ B_{02,n_2} \end{cases} = \varepsilon_{n_2} i^{n_2} \begin{cases} \cos n_2\theta_\alpha \\ \sin n_2\theta_\alpha \end{cases} \left\{ (-1)^{n_2} \exp(-ik_{sa}h_1 \cos \theta_\alpha) \right. \\ \left. \pm k_{21} \exp(ik_{sa}h_1 \cos \theta_\alpha) \right\}, \quad (8)$$

$$\begin{cases} C_{02,n_2} \\ D_{02,n_2} \end{cases} = \varepsilon_{n_2} i^{n_2} \begin{cases} \sin n_2\theta_\beta \\ \cos n_2\theta_\beta \end{cases} \left\{ k_{22} \exp(ik_{s\beta}h_1 \cos \theta_\beta) \right\}. \quad (9)$$

反射系数

$$k_{21} = \frac{\sin 2\theta_\alpha \sin 2\theta_\beta - (\alpha_s / \beta_s)^2 \cos^2 2\theta_\beta}{\sin 2\theta_\alpha \sin 2\theta_\beta + (\alpha_s / \beta_s)^2 \cos^2 2\theta_\beta} \quad \text{和}$$

$$k_{22} = \frac{2 \sin 2\theta_\alpha \cos 2\theta_\beta}{\sin 2\theta_\alpha \sin 2\theta_\beta + (\alpha_s / \beta_s)^2 \cos^2 2\theta_\beta}. \quad (10)$$

为便于问题求解, 采用一个半径非常大的圆弧来模拟半空间表面(图 1)。研究表明, 随着大圆弧半径  $b_2$  的逐渐增大, 解答将趋于精确解。

当半空间存在洞室时, 会产生散射波。因左洞室

产生的散射 P 波和 SV 波可以表示为

$$\phi_{s1}^{(1)}(r_1, \theta_1) = \sum_{n_1=0}^{+\infty} H_{n_1}^{(1)}(k_{sa}r_1)(A_{s1,n_1} \cos n_1\theta_1 + B_{s1,n_1} \sin n_1\theta_1), \quad (11)$$

$$\psi_{s1}^{(1)}(r_1, \theta_1) = \sum_{n_1=0}^{+\infty} H_{n_1}^{(1)}(k_{s\beta}r_1)(C_{s1,n_1} \sin n_1\theta_1 + D_{s1,n_1} \cos n_1\theta_1). \quad (12)$$

因右洞室产生的散射 P 波和 SV 波可以表示为

$$\phi_{s2}^{(2)}(r_2, \theta_2) = \sum_{n_2=0}^{+\infty} H_{n_2}^{(1)}(k_{sa}r_2)(A_{s2,n_2} \cos n_2\theta_2 + B_{s2,n_2} \sin n_2\theta_2), \quad (13)$$

$$\psi_{s2}^{(2)}(r_2, \theta_2) = \sum_{n_2=0}^{+\infty} H_{n_2}^{(1)}(k_{s\beta}r_2)(C_{s2,n_2} \sin n_2\theta_2 + D_{s2,n_2} \cos n_2\theta_2). \quad (14)$$

因大圆弧假定而产生的散射 P 波和 SV 波可以表示为

$$\phi_{s3}^{(3)}(r_3, \theta_3) = \sum_{n_3=0}^{+\infty} J_{n_3}(k_{sa}r_3)(A_{s3,n_3} \cos n_3\theta_3 + B_{s3,n_3} \sin n_3\theta_3), \quad (15)$$

$$\psi_{s3}^{(3)}(r_3, \theta_3) = \sum_{n_3=0}^{+\infty} J_{n_3}(k_{s\beta}r_3)(C_{s3,n_3} \sin n_3\theta_3 + D_{s3,n_3} \cos n_3\theta_3), \quad (16)$$

式(11)~(16)中,  $H_n^{(1)}(x)$  和  $J_n(x)$  分别为 Hankel 函数和第一类 Bessel 函数。从物理意义上讲, 他们分别表示由  $o_1$  向外传播的波、由  $o_2$  向外传播的波、以及波在两个洞室表面和大圆弧表面来回反射而产生的波, 他们在无穷远处均满足 Sommerfeld 辐射条件。

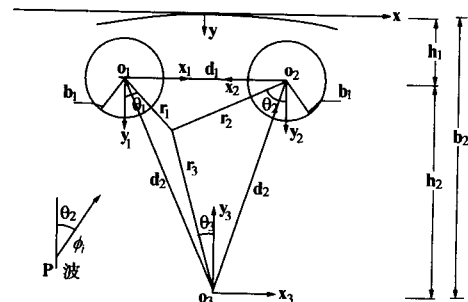


图 1 模型

Fig. 1 Model

这样, 半空间中的波势函数由入射波和反射波以及散射波三部分组成:

$$\phi^s = \phi_{i+r} + \phi_{s1}^{(1)} + \phi_{s2}^{(2)} + \phi_{s3}^{(3)}, \quad (17)$$

$$\psi^s = \psi_r + \psi_{s1}^{(1)} + \psi_{s2}^{(2)} + \psi_{s3}^{(3)}. \quad (18)$$

问题的边界条件为两个洞室内表面零应力

$$\tau_{r_1 r_1} = \tau_{r_1 \theta_1} = 0 \quad (r_1 = b_1), \quad (19)$$

$$\tau_{r_2 r_2} = \tau_{r_2 \theta_2} = 0 \quad (r_2 = b_2), \quad (20)$$

和半空间表面零应力

$$\tau_{r_3 r_3} = \tau_{r_3 \theta_3} = 0 \quad (r_3 = b_2). \quad (21)$$

引入边界条件, 可以求解波势函数(11)~(16)中的待定系数。因篇幅所限, 具体求解过程不再赘述。由于上述波势函数分别在不同坐标系给出, 在引入边

界条件之前, 需要进行坐标变换<sup>[14]</sup>; P波入射下平面应变问题的应力表达式为<sup>[7]</sup>

$$\tau_{rr} = \lambda \nabla^2 \phi + 2\mu \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right], \quad (22)$$

$$\tau_{r\theta} = \mu \left\{ 2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right] \right\}, \quad (23)$$

$$\tau_{\theta\theta} = \lambda \nabla^2 \phi + 2\mu \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} \right) \right]. \quad (24)$$

求得波函数所有待定系数后, 即可由式(24)求得两个洞室内表面环向动应力集中系数<sup>[7]</sup>

$$\tau_{\theta\theta}^* = \frac{\tau_{\theta\theta}}{\tau_0}, \quad (25)$$

式中  $\tau_0 = \mu k_\beta^2$ .

当两个洞室之间距离无穷大时, 本文解析解退化成为单个洞室解析解<sup>[12]</sup>. 限于篇幅, 不再赘述.

## 2 数值结果与分析

首先来分析解析解的精度. 解析解的精度由无穷级数的截断计算来确定, 可以通过边界条件(19)~(21)的满足程度来检验. 首先定义无量纲频率  $\eta = \frac{2b_1}{\lambda}$ ,  $\lambda$  为半空间中横波波长. 在下面的计算中, 取介质的泊松比为 0.25, 则介质中纵波波速为横波波速的 1.732 倍. 本文实际计算中取大圆弧半径  $b_2 = 10000b_1$ .

图 2 和图 3 分别给出了两个洞室之间距离  $d_1/b_1 = 3.0$ , 埋深为  $h_1/b_1 = 1.5$ , 入射角  $\theta_a = 60^\circ$ , 截取项数依次取 5, 7, 9 和 10, 12, 14, 对应于  $\eta = 1.0$  和  $\eta = 2.0$  两种情况, 三个边界 (19)~(21) 上应力  $\tau_{rr}$  和  $\tau_{r\theta}$  的收敛精度. 可以看出, 随着级数截断项数的增大, 应力幅值很快减小并趋于零, 并且应力沿圆周的波动也随之趋于平稳. 可见只要截断项数足够大, 应力就可以足够小, 亦即边界条件 (19)~(21) 得到满足.

在具体计算中, 级数的截取可以这样来进行, 即先取不同项数来计算, 观察相邻计算项数之间的误差, 当该误差小于某预先设定精度时, 即可用该项数作为收敛计算项数. 计算表明, 随着截断项数的增加, 误差逐渐趋于零; 当无量纲频率  $\eta$  较小时, 收敛较快, 当无量纲频率  $\eta$  较大时, 收敛相对较慢, 这说明入射频率较低时, 所需截断项数较少, 而当入射频率较高时, 所需截断项数较多.

下面分析 P 波入射下洞室的动应力集中问题. 图 4~图 6 分别给出了入射 P 波频率分别为  $\eta = 0.5$ ,  $\eta = 1.0$  和  $\eta = 2.0$ 、两个洞室埋深为  $h_1/b_1 = 1.5$ , 洞室之间距离分别为  $d_1/b_1 = 2.5, 5.0, 10.0$  和  $10^5$ , 入射

角分别为  $0^\circ, 30^\circ$  和  $60^\circ$  情况下, 两个洞室内表面环向动应力集中系数.

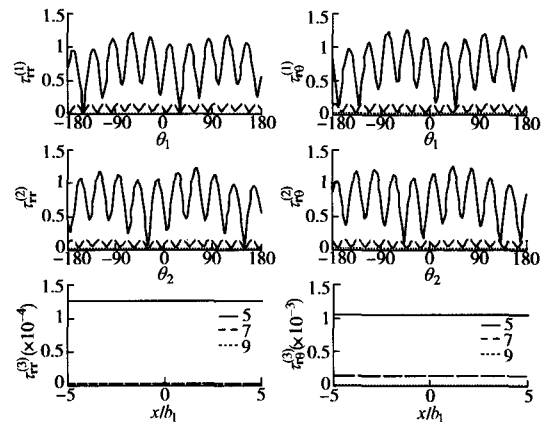


图 2 三个边界上应力随截取项数的增大趋于零 ( $\eta = 1.0$ )  
Fig. 2 Residual stresses on three boundaries approaching zero ( $\eta = 1.0$ )

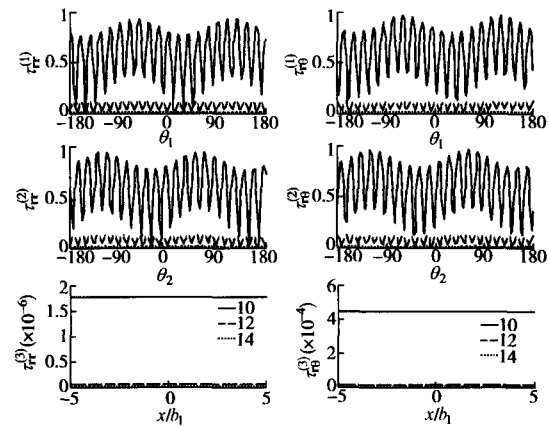


图 3 三个边界上应力随截取项数的增大趋于零 ( $\eta = 2.0$ )  
Fig. 3 Residual stresses on three boundaries approaching zero ( $\eta = 2.0$ )

首先, 从图 4~图 6 可以看出, 随着入射频率的增大, 总体上动应力集中系数的空间变化由简单逐渐变得复杂, 动应力集中系数的幅值逐渐减小.

当  $\eta = 0.5$  时 (图 4), 动应力集中系数峰值达到 11.7, 出现在  $d_1/b_1 = 2.5$ 、波  $0^\circ$  入射情况 (图 4(a)); 随着洞室之间距离逐渐增大, 可以看出, 动应力集中系数逐渐减小, 如当  $d_1/b_1 = 10.0$  时, 动应力集中基本趋于稳定; 当两个洞室之间距离趋于很大时, 如当  $d_1/b_1 = 10^5$  (图 4(d)), 洞室的动应力集中系数趋于单个洞室情况 (可以看出此时左右两个洞室的动应力集中系数分布完全一致), 而此时对应于波  $0^\circ$  入射的动应力集中系数为 3.3; 由此可以看出, 洞室之间距离对动应力集中具有显著影响, 该影响可以达到 3.5 倍以上, 原因在于当两个洞室之间距离较近时, 会造成波在两个洞室之间多次反射, 两个洞室之间的相互作用比较明显, 因而在两个洞室相对的区域会出现显著

的动应力集中 (图 4 (a))。

当  $\eta=1.0$  时 (图 5), 动应力集中系数的峰值出现在  $d_1/b_1=2.5$ 、波  $30^\circ$  入射情况 (图 5 (a)), 峰值达到 8.2, 而相应单个洞室情况 (图 5 (d)) 动应力集中系数为 2.9, 相差仍达到 2.8 倍; 同样随着两个洞室之间距离逐渐增大, 动应力集中系数逐渐减小。

当  $\eta=2.0$  时 (图 6), 动应力集中系数的峰值出现在  $d_1/b_1=5.0$ 、波  $30^\circ$  入射情况 (图 6 (b)), 峰值达

到 4.0, 相应单个洞室情况 (图 6 (d)) 动应力集中系数为 2.9, 相差 1.4 倍; 由此可以看出, 动应力集中系数峰值也有可能出现在洞室之间距离较大情况。

由此可见, 除入射波波长和入射角度等因素外, 动应力集中系数大小还取决于洞室之间的距离。

最后值得说明的是, 洞室埋置深度对动应力集中也会有影响。因论文篇幅限制, 将另文给出。

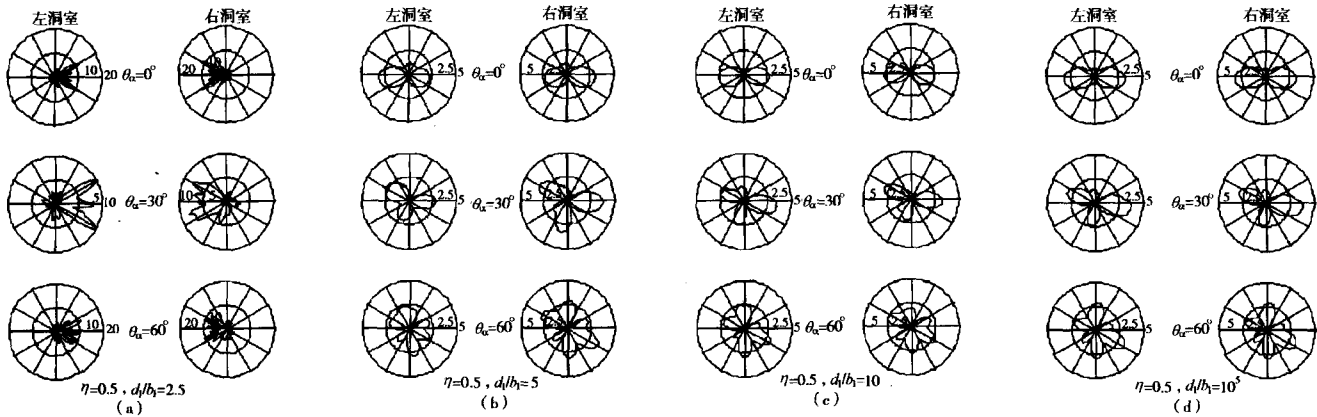


图 4 两个洞室的动应力集中系数 ( $\eta = 0.5$ )

Fig. 4 Dynamic stress concentration factors of two cavities ( $\eta = 0.5$ )

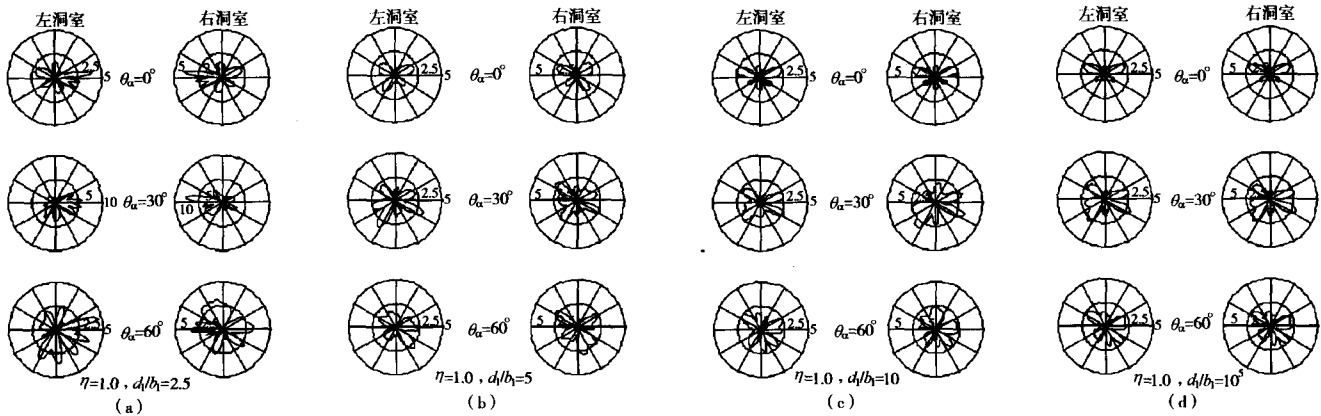


图 5 两个洞室的动应力集中系数 ( $\eta = 1.0$ )

Fig. 5 Dynamic stress concentration factors of two cavities ( $\eta = 1.0$ )

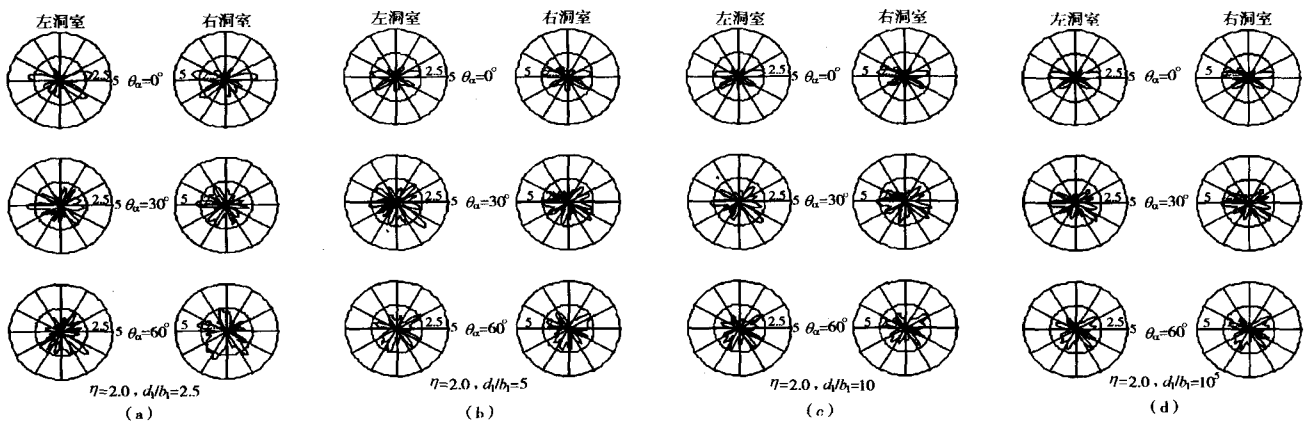


图 6 两个洞室的动应力集中系数 ( $\eta = 2.0$ )

Fig. 6 Dynamic stress concentration factors of two cavities ( $\eta = 2.0$ )

### 3 结 语

本文采用波函数展开法给出了半空间中洞室群在平面P波入射下动应力集中问题的一个解析解。数值结果表明,当洞室之间距离较近时,洞室之间的相互作用对地下洞室群的动应力集中具有显著的放大作用,两个洞室情况动应力集中系数可能达到单个洞室的3.5倍以上,动应力集中系数峰值位于两个洞室相对的区域;随着洞室之间距离的增大,动应力集中系数逐渐减小;随着入射波频率的增大,动应力集中系数空间分布由简单逐渐变得复杂。

#### 参考文献:

- [1] 中国科学院工程力学研究所.海城地震震害[M].北京:地震出版社,1979.
- [2] 刘恢先.唐山大地震震害[M].北京:地震出版社,1986.
- [3] Asakura T, Sato Y. Damage to mountain tunnels in hazard area [J]. Soils and Foundations, Japanese Geotechnical Society, Special Issue, 1996, 301-310.
- [4] Dowding C D, Rozan A. Damage to rock tunnels from earthquake shaking[J]. Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, 1978, 104: 175-191.
- [5] 林 皋.地下结构抗震分析综述(上、下)[J].世界地震工程, 1990,(2):1-10;(3):1-10 转 42.
- [6] 林 皋,梁青槐.地下结构的抗震设计[J].土木工程学报, 1996: 29(1):15-24.
- [7] Pao Y H, Mow C C. Diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations [M]. New York: Crane, Russak & Company Inc, 1973.
- [8] Lee V W. On deformation near circular underground cavity subjected to incident plane SH waves [A]. In: Proceedings of the Application of Computer Methods in Engineering Conference [C]. Los Angeles, 1977. 951-962.
- [9] Lee V W, Trifunac M D. Response of tunnels to incident SH-waves [J]. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 1979, 105:643~659.
- [10] Balendra T, Thambiratnam D P, Koh C G, Lee S. Dynamic response of twin circular tunnels due to incident SH-waves [J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1984, 12:181-201.
- [11] Lee V W, Karl J. Diffraction of SV waves by underground, circular, cylindrical cavities [J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 1992, 11:445-456.
- [12] Lee V W, Karl J. On deformation near a circular underground cavity subjected to incident plane P waves [J]. European Journal of Earthquake Engineering, 1993, (1): 29-36.
- [13] Davis C A, Lee V W, Bardet J P. Transverse response of underground cavities to incident SV waves [J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 2001, 30(3): 383-410.
- [14] 梁建文,张 浩, Lee V W.地下双洞室在SV波入射下动力响应问题解析解[J].振动工程学报,2004,17(2):132-140.