文章编号:1007-9432(2002)05-0569-03

一类矩阵族的特征值问题

秦效英　　朱正佑

(太原理工大学理学院)　(上海大学)

摘　要:对一类矩阵族 $A+\lambda B+\mu C$ 的特征值问题作了一般性讨论,用构造扩大方程组的方法求 $\lambda=\lambda^*$,$\mu=\mu^*$,使得 $A+\lambda^* B+\mu^* C$ 的秩为 $n-2$.

关键词:广义特征值;扩大正则方程组;牛顿迭代法

中图分类号:O241　　　**文献标识码**:A

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 $n\times n$ 实对称矩阵,$\boldsymbol{B}$ 正定,求 $\lambda\in R$ 使得矩阵 $\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{B}$ 的秩小于 $n-1$,这样的问题就是众所周知的广义特征值问题。对这问题已有很多的讨论[1~3],并在实际工程中有广泛的应用。文献[4]提出了另一类特征值问题:设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 是已知的 $n\times n$ 实对称矩阵,找 $\lambda^*,\mu^*\in R$,使得 $\boldsymbol{A}+\lambda^*\boldsymbol{B}+\mu^*\boldsymbol{C}$ 的秩等于 $n-2$. 文献[4]中仔细讨论了当 $n=3$ 的情形,给出了这个问题的计算方法,并讨论了这类特征值问题在求解一类常见的二维非线性分支方程中的应用。鉴于这类特征值问题与有限维分支方程的求解有密切关系,本文对[4]中提出的问题作一般性的讨论,并给出了求解这类矩阵族特征值问题的计算方法,此方法是构造求解此类问题的扩大的正则方程组。

1　扩大的正则方程组的构造与正则性的证明

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 是 $n\times n$ 实对称矩阵,欲求 λ^*,μ^* 使得 $\boldsymbol{A}+\lambda^*\boldsymbol{B}+\mu^*\boldsymbol{C}$ 的核空间的维数为 2. 以下用 $\mathrm{Null}(\boldsymbol{A}+\lambda^*\boldsymbol{B}+\mu^*\boldsymbol{C})$ 表示 $\boldsymbol{A}+\lambda^*\boldsymbol{B}+\mu^*\boldsymbol{C}$ 的核空间,为此构造如下的扩大方程组:

$$\begin{cases}(\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}+\mu\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0};\\(\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}+\mu\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b})\boldsymbol{x}+\sigma\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0};\\(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})-1=0;\\(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})-1=0;\\(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0.\end{cases}\tag{1}$$

这是一个具有 $(2n+3)$ 个未知量,$(2n+3)$ 个方程的非线性方程组,$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda,\mu,\sigma)\in R^n\times R^n\times R\times R\times R$ 为未知量,$\boldsymbol{b}\in R^n$ 为一个常向量,只要满足 $(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{b})=0$,$(\boldsymbol{y}^*,\boldsymbol{b})\neq0$ 即可。

设 $(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*,\lambda^*,\mu^*,0)$ 是方程组(1)的一个解,即下式成立:

$$\begin{cases}(\boldsymbol{A}+\lambda^*\boldsymbol{B}+\mu^*\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{0};\\(\boldsymbol{A}+\lambda^*\boldsymbol{B}+\mu^*\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}^*+(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{b})\boldsymbol{x}^*+0\boldsymbol{y}^*=\boldsymbol{0};\\(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{x}^*)-1=0;\\(\boldsymbol{y}^*,\boldsymbol{y}^*)-1=0;\\(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)=0.\end{cases}\tag{2}$$

方程组(1)的左边求 Jacobi 矩阵,此矩阵在点 $(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*,\lambda^*,\mu^*,0)$ 处为以下 $(2n+3)\times(2n+3)$ 阶方阵 $\boldsymbol{D}$:

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}^* & 0 & \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^* & \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^* & 0\\ \boldsymbol{x}^*\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{D}^* & \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}^* & \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}^* & \boldsymbol{y}^*\\ 2\boldsymbol{x}^{*\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2\boldsymbol{y}^{*\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0\\ \boldsymbol{y}^{*\mathrm{T}} & \boldsymbol{x}^{*\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

其中,$\boldsymbol{D}^*=\boldsymbol{A}+\lambda^*\boldsymbol{B}+\mu^*\boldsymbol{C}$.

定理　若以下二阶行列式的值不为零,即:

$$\begin{vmatrix}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{x}^*) & (\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{x}^*)\\(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*) & (\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)\end{vmatrix}\neq0,\tag{3}$$

则上面行列式 $\boldsymbol{D}$ 非奇异。

证明　只要证明 $\forall(\boldsymbol{h},\boldsymbol{k},r_1,r_2,\tau)\in R^n\times R^n\times R\times R\times R$,均有线性方程组 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}},r_1,r_2,\tau)^{\mathrm{T}}=0$ 只有零解。即有以下齐线性方程组:

作者简介:秦效英,男,1962 年 7 月生,硕士,讲师,研究方向:分支问题数值方法,太原,030024

收稿日期:2002-05-05

$$\begin{cases} \boldsymbol{D}^* \boldsymbol{h} + r_1 \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^* + r_2 \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{0}, \\ (\boldsymbol{b},\boldsymbol{h})\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{D}^* \boldsymbol{k} + r_1 \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}^* + r_2 \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}^* + \tau \boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{0}, \\ (\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{h}) = 0, \\ (\boldsymbol{y}^*,\boldsymbol{k}) = 0, \\ (\boldsymbol{y}^*,\boldsymbol{h}) + (\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{k}) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

只有零解。事实上，由方程组(4)的第一和第二个等式有：

$$\boldsymbol{D}^* \boldsymbol{h} = (\boldsymbol{A} + \lambda^* \boldsymbol{B} + \mu^* \boldsymbol{C})\boldsymbol{h} = -r_1 \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^* - r_2 \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^*; \tag{5}$$

$$\boldsymbol{D}^* \boldsymbol{k} = (\boldsymbol{A} + \lambda^* \boldsymbol{B} + \mu^* \boldsymbol{C})\boldsymbol{k} = -(\boldsymbol{b},\boldsymbol{h})\boldsymbol{x}^* - \tau \boldsymbol{y}^* - r_1 \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}^* - r_2 \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}^*. \tag{6}$$

式(5)的两边分别与 $\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*$ 作内积，得：

$$\begin{cases} -r_1(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{x}^*) - r_2(\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{x}^*) = 0, \\ -r_1(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*) - r_2(\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

由假设(3)知式(7)只有零解 $r_1 = r_2 = 0$. 式(6)两边分别与 $\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*$ 作内积，并将 $r_1 = r_2 = 0$ 代入，得：

$$\begin{cases} -(\boldsymbol{b},\boldsymbol{h})(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{x}^*) = 0, \\ -\tau(\boldsymbol{y}^*,\boldsymbol{y}^*) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

由式(8)知 $\tau = 0, (\boldsymbol{b},\boldsymbol{h}) = 0$.

将 $r_1 = r_2 = \tau = (\boldsymbol{b},\boldsymbol{h}) = 0$ 代入式(5)，(6)得：

$$\begin{cases} (\boldsymbol{A} + \lambda^* \boldsymbol{B} + \mu^* \boldsymbol{C})\boldsymbol{h} = 0, \\ (\boldsymbol{A} + \lambda^* \boldsymbol{B} + \mu^* \boldsymbol{C})\boldsymbol{k} = 0. \end{cases} \tag{9}$$

由式(9)得：

$$\begin{cases} \boldsymbol{h} = l_1 \boldsymbol{x}^* + l_2 \boldsymbol{y}^*, \\ \boldsymbol{k} = m_1 \boldsymbol{x}^* + m_2 \boldsymbol{y}^*. \end{cases} \tag{10}$$

其中，$l_1, l_2, m_1, m_2 \in R$. 将式(10)代入方程组(4)的第3,4,5式和 $(\boldsymbol{b},\boldsymbol{h}) = 0$ 中得：

$$\begin{cases} l_1(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{x}^*) = 0, \\ m_2(\boldsymbol{y}^*,\boldsymbol{y}^*) = 0, \\ l_2(\boldsymbol{y}^*,\boldsymbol{y}^*) + m_1(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{x}^*) = 0, \\ l_2(\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}^*) + l_2(\boldsymbol{b},\boldsymbol{y}^*) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

可见，$l_1 = l_2 = m_1 = m_2 = 0$，所以 $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$.

总之，$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}, r_1 = r_2 = \tau = 0$，证毕。

2 几点说明及例子

以下对上一节提出的方法的具体实现作一些具体的说明。

2.1 关于向量 b 的选取问题

按上一节要求应选取 b 使之满足：

$$(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{b}) = 0, (\boldsymbol{y}^*,\boldsymbol{b}) \neq 0. \tag{12}$$

其中 $\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*$ 是 $\mathrm{Null}(\boldsymbol{A} + \lambda^* \boldsymbol{B} + \mu^* \boldsymbol{C})$ 中彼此直交的两个单位向量。由于

$$\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^* \in \mathrm{Null}(\boldsymbol{A} + \lambda^* \boldsymbol{B} + \mu^* \boldsymbol{C})$$

是可以任意选取的，条件(12)等价于：

$$\boldsymbol{b} \notin (\mathrm{Null}(\boldsymbol{A} + \lambda^* \boldsymbol{B} + \mu^* \boldsymbol{C}))^{\perp}. \tag{13}$$

因为 $(\mathrm{Null}(\boldsymbol{A} + \lambda^* \boldsymbol{B} + \mu^* \boldsymbol{C}))^{\perp}$ 是 R^n 的一个 $n-2$ 维子空间，其测度为零，所以当随机选取 $\boldsymbol{b} \in R^n, \boldsymbol{b} \neq 0$ 总可以认为满足(13)。

2.2 初值的选取方法

为了用牛顿方法求解扩大方程组(1)，初值的选取是至关重要的。假定通过问题本身的分析或其它方法已知一个接近 (λ^*,μ^*) 的 (λ',μ')，则初值 $(\boldsymbol{x}^{(0)}, \boldsymbol{y}^{(0)}, \lambda^{(0)}, \mu^{(0)}, \sigma^{(0)})$ 以及 $\boldsymbol{b}$ 可按如下方法选取：$\boldsymbol{x}^{(0)}$，$\boldsymbol{y}^{(0)}$ 取为 $\boldsymbol{A} + \lambda' \boldsymbol{B} + \mu' \boldsymbol{C}$ 按模最小和次小特征值对应的特征向量。$\lambda^{(0)} = \lambda', \mu^{(0)} = \mu', \sigma^{(0)} = 0, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}^{(0)}$.

2.3 一个计算实例

取
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & 1 \\ 3 & 1 & 20 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -7 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

当 $\lambda^* = 9, \mu^* = -7$ 时，

$$\mathrm{Null}(\boldsymbol{A} + \lambda^* \boldsymbol{B} + \mu^* \boldsymbol{C}) = \mathrm{span}\{\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*\}.$$

其中，$\boldsymbol{x}^* = (1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}^* = \left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}}$，

容易验证：

$$\begin{vmatrix} (\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{x}^*) & (\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{x}^*) \\ (\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*) & (\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*) \end{vmatrix} = \sqrt{2} \neq 0.$$

设已知初值 $\lambda' = 8.8, \mu' = -6.8$，按本节说明的初值选取方法，用牛顿迭代法求解式(1)，经二次迭代得：

$\lambda_1 = 8.991\,7$，$\mu_1 = -6.992\,91$；

$\lambda_2 = 8.999\,09$，$\mu_2 = -6.999\,31$.

参 考 文 献

[1] Geltner P B. General rayleigh quotient iteration[J]. SIAM J Numr Anal,1981,18(5):839-843.

[2] Ruke A . Algorithms for the nonlinear eigenvalue problem[J]. SIAM J Numer Anal,1973,10(4):684-689.

[3] Ruke A . SOR-Methods for the eigenvalue problem with large sparse matrices[J]. Math Comp, 1974,28:695-710.

[4] 朱正佑,姚路刚. 二阶奇点附近的分支解及其数值方法[J]. 计算数学,1992,14(2):157-172.

[5] 朱正佑,姚路刚. 一类高阶奇点位置确定的数值方法[J]. 计算数学,1988,10:408-414.

The Eigenvalue Problem of a Type of Matrixes

Qin Xiaoying (*College of Sciences of TUT*)

Zhu Zhengyou (*Shanghai University*)

Abstract: When $A+\lambda B+\mu C$ is a type of matrixes , we can find $\lambda=\lambda^*$, $\mu=\mu^*$ by constructing the expanded regular system of the equations to let the rank of $A+\lambda^* B+\mu^* C$ be $n-2$.

Key words: extended eigenvalue; expanded regular system of equations; Newton's method of iteration

(编辑:张红霞)