

# 奇异值分解法与阻尼最小二乘法的对比

阮百尧· 葛为中

(桂林工学院应用物理与计算机系)

**【摘要】** 本文根据电阻率测深曲线的一维反演中对初始模型的要求和收敛速度,论述了奇异值分解法(维根斯法)与阻尼最小二乘法(马奎特法)的优缺点。

**【关键词】** 奇异值分解法 阻尼最小二乘法 初始模型 收敛

## 0 引言

地球物理反演计算一般是在计算机上实现的,且90%的反演方法最后要归结到求解线性方程组:  $Ax=b$  的问题,这里  $A$  为  $n \times m$  阶矩阵,且对地球物理反演问题而言  $A$  多半是接近奇异的,  $x$  为模型参数修改量。解这个非方阵线性方程组最常用的方法有:

(1)奇异值分解法:它的基本思想是建立在奇异值分解定理上,即任意  $n \times m$  阶矩阵  $A$  均可分解为  $n \times m$  阶正交阵  $U$  和  $m \times m$  阶正交阵  $V$  和一个对角阵  $W$ :  $A=UWV^T$ ,式中  $W$  中对角线元数即奇异值  $w_i (i=1,2,\dots,m)$  的平方,实际上是  $A^T A$  的特征值。当  $A$  非奇异时,奇异值较大,方程组:  $Ax=b$  有解  $x=VW^{-1}U^T b$ 。当  $A$  接近奇异时,有的奇异值就较小,此时解  $x=VW^{-1}U^T b$  的误差就较大。为了解决这个问题,维根斯(Wiggins)提出用最接近的矩阵  $R$  来代替  $A$ ,而  $R=UW_c V^T$ ,其中  $W_c = \text{diag}(w_1, w_2, \dots, w_q, 0, \dots, 0)$ ,  $W$  中小的奇异值在这里便被零代替了。因此有  $Rx \cong b$ ,而解  $x=VW_c^{-1}U^T b$ ,这里  $W_c^{-1} = \text{diag}(w_1^{-1}, w_2^{-1}, \dots, w_q^{-1}, 0, \dots, 0)$ 。

(2)最小二乘法:此时方程变为:  $A^T Ax=A^T b$ 。当  $A$  非奇异时,有唯一解:  $x=(A^T A)^{-1} A^T b$ 。当  $A$  接近奇异时,用上式求解误差就会很大,导致反演不收敛。为了解决这个问题,马奎特提出给系数矩阵  $A^T A$  的对角元素上加上一个常数,即  $(A^T A + \lambda I)x=A^T b$ ,以改善方程的条件,这就是著名的马奎特法又称阻尼最小二乘法。

分析奇异值(维根斯)分解方法和阻尼最小二乘(马奎特)方法,可以认为奇异值分解(维根斯)方法是将导致小的奇异值的方程取消来改善奇异值,而马奎特方法则是通过在

$A^T A$  的对角元素上加常数来增大  $A$  的奇异值,两者的思想刚好相反。本文通过对电阻率测深曲线的一维反演中初始模型的要求和反演的收敛速度,分析了奇异值(维根斯)分解法与马奎特法的优缺点。

## 1 电阻率测深一维真实模型和初始模型的设定

为了分析奇异值(维根斯)分解法和马奎特法的优缺点,用电阻率测深的一维反演对初始模型的要求及收敛速度来进行比较。本文真实模型为三层水平层状大地,其层参数见表1:

表1 真实模型

	第一层	第二层	第三层
电阻率(QM)	50	20	500
厚度(M)	5	10	

用正演方法计算出电阻率测深曲线。然后用线性化方法进行迭代反演,其中线性方程组分别用奇异值(维根斯)分解法和马奎特法来求解,并用下面给定的初始模型(见表2)考察它们对初始模型的要求和收敛速度。

表2 初始模型

		第一层	第二层	第三层	第四层
模型一	电阻率(QM)	50	30	200	
	厚度(M)	3	10		
模型二	电阻率	5	5	5	
	厚度	5	5		
模型三	电阻率	15	15	15	
	厚度	15	15		
模型四	电阻率	1	1	1	1
	厚度	1	1	1	
模型五	电阻率	7	7	7	7
	厚度	7	7	7	
模型六	电阻率	10	10	10	10
	厚度	10	10	10	
模型七	电阻率	0.0001	0.0001	0.0001	
	厚度	5	10		
模型八	电阻率	10000	10000	10000	
	厚度	5	10		
模型九	电阻率	50	20	500	
	厚度	9	9		
模型十	电阻率	50	20	500	
	厚度	20	20		

所选择的初始模型包含几种类型,第一类是根据测深曲线的特点给出的与真实模型比较接近的模型,如模型一;第二类是盲目型,所给的各种层参数全部相同,如模型二至模型

六;第三类深度参数与真实模型相同,电阻率参数与真实模型不同,如模型七至模型八;第四类电阻率参数与真实模型相同,深度参数与真实模型不同,如模型九至模型十。

## 2 奇异值(维根斯)分解方法的收敛性

表3 是对上表所给的初始模型,用奇异值(维根斯)分解方法进行反演所得的反演结果和收敛性情况。

表3 奇异值(维根斯)分解方法所得的反演结果和收敛性

		第一层	第二层	第三层	第四层	迭代次数	测深曲线 拟合误差%
模型	电阻率(QM)	50	20.1	493.3		3	0.3
	厚度(M)	5	10.1				
模型一	电阻率	50	19.8	493.8		7	0.3
	厚度	5.05	9.93				
模型二	电阻率	50	20.6	491.9		7	0.42
	厚度	5	10.3				
模型三	电阻率	50	62.4	20.2	497.3	11	0.14
	厚度	3.96	0.76	10.27			
模型四	电阻率	50	23.3	20	499.4	9	0.22
	厚度	5	0.11	9.88			
模型五	电阻率	44	10	5408	71	100	8.84
	厚度	32.4	29.5	3			
模型六	电阻率	50	23.3	500.8		20	0.08
	厚度	5	10.1				
模型七	电阻率	50	21.1	479.8		13	0.9
	厚度	5	10.7				
模型八	电阻率	50	20.1	499		3	0.3
	厚度	5	10				
模型九	电阻率	44	631.6	900.6		100	9.2
	厚度	29.8	1219				
模型十	电阻率	44	631.6	900.6		100	9.2
	厚度	29.8	1219				

从表中可见,奇异值分解法对初始模型的准确度要求不高,即使当层数与实际情况不一致(如模型四、五)以及模型参数全部相同时,仍然能得到比较好的结果,且收敛速度很快。方法对初始模型的电阻率参数要求不高,只要不违背实际情况,即使与实际情况相差甚远(如模型七、八),也能很快收敛。但方法对初始模型的深度参数的要求相对较高,当与实际相差3倍时,就不能收敛。

## 3 阻尼最小二乘(马奎特)方法的收敛性

阻尼最小二乘法对初始模型的要求较高。当层数给的不当或初始模型不根据测深曲线特点给的时候,如参数取得全部相同,则阻尼最小二乘法很难收敛。另外,阻尼最小二乘法的收敛速度也比奇异值分解法要慢得多。表4为表2中二个初始模型用阻尼最小二乘法进行反演所得的反演结果和收敛情况。

表4 阻尼最小二乘法所得的反演结果和收敛性

		第一层	第二层	第三层	第四层	迭代次数	测深曲线 拟合误差%
模型一	电阻率( $\Omega M$ )	49.6	26.4	483.7		32	1.34
	厚度(M)	4.6	13.8				
模型十	电阻率	47	18.4	499.9		20	5.61
	厚度	14.3	6.2				

从表中也可以看出,阻尼最小二乘法对深度参数的要求比奇异值分解法要低。另外在反演迭代过程中也发现,阻尼最小二乘法收敛速度虽慢但拟合精度逐渐提高;但对奇异值分解法,当初始模型较差时,收敛性且不稳定,收敛曲线发生跳跃。

#### 4 结论

从以上算例及分析可见,奇异值分解法对初始模型的要求比阻尼最小二乘法低,且收敛速度较快;而阻尼最小二乘法的收敛的稳定性比奇异值分解法要好。

#### 参考文献

- 1 杨文采编著. 地球物理反演和地震层析成像. 北京:地质出版社. 1989
- 2 何光谕主编. FORTRAN 77 算法手册. 北京:科学出版社. 1993

## SINGULAR VALUE DECOMPOSITION METHOD AND DAMPING LEAST SQUARE SOLUTION

Ruan Baiyao Ge Weizhong  
(Guilin Institute of Technology)

**Abstract** Choosing different primary models to invert a set of test resistivity sounding curves derived from a known model, according to the demands on primary models and convergent velocity, this paper compares singular value decomposition method with damping least square method.

**Key words** singular value decomposition, damping least square method, primary model, convergence

**【作者简况】** 阮百尧,男,1962年生,浙江上虞人。1982年毕业于中南矿冶学院地质系,1985年及1995年分获中南工业大学地质系硕士和青岛海洋大学海洋地质系博士学位,现任桂林工学院应用物理与计算机系主任,副教授。已发表“直流电阻率测深解释中的直接反演法”等论文十几篇,主要研究方向:地球物理正反演方法。