裴雪重

圆周率 π 的研究与公理化思想

关键词：公理　超越数　圆周率

超越无理数 π 的研究贯穿人类科技发展的四千年历史，任何数的研究都没有像 π 那样倾注人类那么巨大的精力和延续那么绵长的时间，科学史上任何一个问题的探讨都没有像 π 那样反映人类各个时期的思维背景和世界各地域、民族的兴衰际遇。π 像人类文明的一把火炬，很多人陆续接过这把火炬，并把它擎到新的高度。

圆周率 π 的研究历史

历史上关于 π 的研究产生过六次飞跃，或者说可分为六个阶段。

欧几里得公理化思想的建立和古典法计算 π

现存于世的有关圆周率的最早文字记载是公元前 1800 年在埃及产生的莱因德(Rhind)纸草书，这是 19 世纪被发现的。史料中设圆周率为 $(4/3)^4=3.1604\cdots$，以求圆的面积。当时的数学只处于实用计算阶段，没有迹象表明在古埃及已形成论证数学。

论证数学只有在建立公理体系的逻辑基础上才能实行。按照创立逻辑学的亚里士多德(Aristotle，公元前 384～322 年)在《后分析篇》中的观点，把人们公认的不加证明的极少数显明结论叫公理(公设)，其他一切结论在这几条公理基础上按逻辑规则推理论证，证出来的结论叫做定理。知识公有，大家平等竞争，谁推出新定理以谁的名字命名。大约公元前 600～300 年，在希腊已形成公理化研究方法，数学方面首先建立起完善的公理体系的是欧几里得(Euclid)几何学。欧几里得选取少数原始概念和不需证明的几何命题作定义、公理，使之成为全部几何学的出发点和逻辑依据。

欧几里德把数学成果建筑在十条公理的基础上写出《几何原本》13 卷，它成为后世科学著作的典范。这种理论有别于埃及、巴比伦及中国和印度数学的特点，前者注重逻辑演绎，后者源于经验。只有建立公理化体系，数学才成为一门有组织的、独立的和理性的学科。

《几何原本》中已提到圆周率是常数，它是圆周长与直径的比，但对于这个数值书中没有任何叙述。

嗣后娴熟运用公理方法的是阿基米德(Archimedes，公元前 287～212 年)，他在力学上对杠杆原理的证明和在流体静力学方面推导出浮力定律，都是公理化方法的精彩例证。他非常巧妙地开辟了在自然科学分支进行数学推理的道路，对后人创造性思维的发展具有强烈的推动作用。阿基米德另一个划时代的创造是推导出计算 π 的公式，用该公式计算 π 被后人称为古典法。

设直径为 1 的圆外切正 n 边形的周长为 L_n，圆内接正 n 边形的周长为 l_n，则有

$$l_n<\pi<L_n,\quad \frac{2}{l_{2n}}=\frac{1}{L_n}+\frac{1}{l_n},\qquad l_{2n}=\sqrt{l_nL_{2n}}$$

在《圆的度量》一文中，阿基米德利用上式从正六边形开始，逐步计算到圆内接及外切正 96 边形的周长，从而得出 3 又 10／71$<\pi<$3 又 1／7。他取两位小数，确定 $\pi=3.14$。这一成就是在欧几里得公理体系下完成的。虽然在精度上这个数值在世界上只保持大约 400 年，但在认识 π 的方法论上，阿基米德古典法的领先地位保持了 1900 年。阿基米德以后的 1900 年间，虽然在计算 π 的精度上有所前进，但在方

裴雪重，副教授，北京中医药大学，北京 100029。

Pei Xuezhong, Associate Professor, Beijing Traditional Chinese Medicine University, Beijing100029.

法论上的表现与阿基米德大同小异。

阿基米德的思维超越了他所处时代近2000年，这在数学发展史上一直是个谜。笔者根据人类发展历史，用公理化思想发展阶段论来分析，找到了合理的答案，由于罗马人的冲击，希腊文明衰落了。虽然他们的工作成果最终传到欧洲，但由于宗教的压力和政治原因，欧洲迟迟未能接受古希腊的公理化思想，因而数学和社会进步的速度都很慢，直到17世纪才产生真正的飞跃。公理化思想的停顿使这两千年人类走了一个大弯路。

大约在公元150年，希腊的托勒密（C. Torieme）在《数学汇编》中给出$\pi=3.1416$。约530年，印度数学家阿耶波多第一（Aryabhata I）也采用$\pi=3.1416$，这可能是从希腊传入的，也可能是他计算正384边形的周长得到的。他是和祖冲之同时代的人，但这个记录比起祖冲之的水平要逊色多了。

中国人研究π的历史源远流长。《九章算术》已记载“径一周三”的古率。西汉末刘歆为王莽造铜斛（公元9年），采用$\pi=3.1547$。东汉张衡（公元78～139年）采用$\pi=\sqrt{10}$计算球体积。三国吴人王蕃（公元215～257年）采用$\pi=142/45$。这些都是经验值。魏末晋初的刘徽在注《九章算术》（公元263年）时提出“割圆术”。他从圆内接正6边形开始，依次割圆，成倍增长内接正多边形的边数，求得内接正$2n$边形周长l_{2n}与圆半径r及内接正n边形边长l_n的关系：

$$l_{2n}=\sqrt{[r-\sqrt{r^2-(l_n/2)^2}]^2+(l_n/2)^2}$$

他还得出圆面积S，圆内接正n边形面积S_n，正$2n$边形面积S_{2n}满足下列不等式：

$$S_{2n}<S<2S_{2n}-S_n,$$

由此得出圆周率的上下界。

因此取$n=96$，有

$$314\frac{64}{625}<S<314\frac{169}{625}$$

刘徽“弃其余分”，取$\pi=3.14$。他还说：“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆合体而无所失矣。”这说明他已知道求更精确的π值的方法。刘徽的“割圆术”与阿基米德的古典法相类似，虽然计算略嫌烦琐，但在方法论上代表中国古典数学的学术高峰。“割圆术”是在没有借鉴欧几里得公理系统情况下，刘徽自己定义概念，提出许多公认正确的判断作为证明的前提，然后进行推理、证明，方法严谨，合乎逻辑。因此，在缺少推理只注重计算的古代数学界，刘徽是最早接近公理化思想的中国人。“割圆术”奠定此后千余年中国圆周率计算在世界上的领先地位。

中国南北朝时期杰出数学家祖冲之（429～500年）把圆周率精确到小数点后面第7位。由于他本人著作大部分失传，我们只能根据《隋书·律历志》记载知道，祖冲之算出圆周率的真值在3.1415926（朒数）和3.1415927（盈数）之间。他还提出圆周率的“约率”$\pi=22/7$，“密率”$\pi=355/113$。这个记录在世界上领先1000年。估计祖冲之是使用了刘徽的“割圆术”，若真如此，他必然是从圆内接正六边形，十二边形，……，一直计算至24576边形，依次求出它们的边长和面积，这需要对有九位有效数字的大数进行加、减、乘、除和开方运算，须进行100多步，其中近50次的平方、开方，使有效数字延长到十八位之多。当时造纸业还没有兴起，数码和珠算也没有形成，数字运算用的是落后的筹算法。如果祖冲之真是用“割圆术”计算，那他需要具备多么严肃认真的精神，付出多么艰巨刻苦的劳动！

在祖冲之以后近1000年的1427年，阿拉伯数学家卡西（Carchy）在他的《圆周论》中使用阿基米德古典法，计算正3×2^{28}边形周长，得到精确到小数点后16位数字的圆周率，即3.1415926535898732。这是古典法的高峰。

公理化思想最初在欧洲的传播（15至16世纪）

中世纪开始于公元476年西罗马帝国灭亡，结束于15世纪，是公理遭践踏的黑暗时期。文艺复兴带来人们的觉醒，束缚人们思想的烦琐哲学和神学教条的权威逐步被摧毁了。

欧几里得《几何原本》在其诞生1800年后才在欧洲广泛传播，这有赖于造纸和印刷业的发展。从12世纪以来，欧洲通过阿拉伯人从中国学会了造纸。大约在1450年，谷登堡（Johann Gutenberg）发明活版印刷，加速了知识的传播。1482年，欧几里得《几何原本》在威尼斯出现。由于掌握了公理化方法，欧洲人一下子超过了中国人、印度人和阿拉伯人。

这一时期科学史上的最重大事件是哥白尼（Copernicus）提出日心说，这一学说向数学提出新的课题。哥白尼的弟子雷蒂库斯（G. J.

Retikusy）为天文观测的需要，推算较精密的三角函数表，令半径等于 10^{15}，作每隔 10″的正弦、正切及正割表，当时全凭手算。雷蒂库斯和他的助手工作达 12 年之久，直到死后才由他的学生奥托（V. Arotue）于 1596 年完成并刊行于世。精密的三角函数值的计算需要精密的 π 值才能实现。

为得到更精密的 π 值，欧洲人摆脱古典的几何方法，第一次用代数的无限乘积形式表示 π，这就是韦达（F. Viete）于 1593 年把 $2/\pi$ 表示为

$$\prod_{n=2}^{\infty}\cos\frac{\pi}{2^n}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots\cdots$$

这个方法把几何推理延伸到三角和代数方面，是公理方法的进步，同时在算式上给出极限的形式，为计算 π 带来方便。荷兰人范彻仑（L. Van Ceulen，1540～1610 年）用此式计算 π 到小数点后 35 位数。韦达给出的 π 的表达形式具有数形结合的意义，预示着数学研究新时期的到来。

牛顿时代（17 世纪）

17 世纪是人类思想史上最辉煌的时期。笛卡尔（Descartes）和费马（Fermat）用代数方法研究几何，创造了解析几何学，其主要方法是把平面或空间导入直角坐标系，把代数方程和曲线、曲面等联系起来。这个关于数和形结合的创造是数学中最丰富最有效的发明之一。笛卡尔对公理化思想有极深刻的认识，他认为只有立足于公理上的证明才是无懈可击的，而且是任何权威所不能左右的。

解析几何的建立导致运动和变化进入数学，产生了微积分。微积分是继欧几里得几何之后，全部数学中的一个最伟大的创造，它的奠基人是牛顿（I. Newton，1642～1727 年）和莱布尼兹（G. W. Leibniz，1646～1716 年）。牛顿仿照《几何原本》的写法，发表了他的代表作《自然哲学的数学原理》，成为公理化思想在数学方面最辉煌的成果。它标志定量科学研究的新时代的到来。从此，公理化研究方法迅速推广到各个领域，导致数、理、化、天、地、生各学科的兴起和蓬勃发展。

微积分研究深入发展的一个表现是无穷级数理论的逐步成熟。无穷级数把复杂函数的计算代数化，化成加减乘除手算可以进行的工作，这使得计算 π 的精度又有了飞跃。17 世纪以后，出现很多用无穷级数或各种形式的极限值表示 π 的式子。1655 年，沃利斯（J. Wallis）给出

$$\frac{4}{\pi}=\frac{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\cdot9\cdot11\cdot11\cdots}{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\cdot10\cdot10\cdot12\cdots}$$

1658 年，布龙克尔（L. Brouncker）把上式改写成无限连分数

$$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cdots\cdots}}}$$

1671 年，格雷果里（J. Gregory）得出无穷级数

$$\mathrm{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots\cdots(-1\leqslant x\leqslant1)$$

1674 年，莱布尼兹由此幂级数得出收敛级数

$$\frac{4}{\pi}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots\cdots$$

这是无穷级数中表达 π 的最简单的算式，但它收敛得非常慢，以至于用它计算 π，即使达到阿基米德时代的精度 3.14，也得算 10 万项。但是，梅钦（J. Machin）提出公式

$$\frac{4}{\pi}=4\mathrm{arctg}\frac{1}{5}-\mathrm{arctg}\frac{1}{239}$$

与格雷果里幂级数相结合是近代人们计算 π 经常使用的方法。1873 年，香克斯（W. Shanks）用这个方法计算 π，花了 21 年时间，算到小数点后 707 位。长时间内人们一直认为这是最高记录。但在 1946 年，菲格斯（D. F. Fuegess）发现香克斯的结果中第 528 位错了。他后来和雷恩（J. W. Leine）在 1948 年联合发表精确到 808 位的 π 值。

计算 π 的方法还有很多，如概率论中的蒙特卡罗法（Monte Carlo Method，1945 年）等等。由于在研究 π 的性质和计算 π 的精度方面没有什么突破，这里不一一叙述。

18 世纪

18 世纪数学界最杰出的人物是欧拉（Euler，1707～1783 年）。他的创造深入到数学的各个领域，关于 π 的研究也有独到的贡献。1737 年，欧拉提出用 π 表示圆周率，从此 π 成为世界性的通用符号。1748 年，欧拉在《无穷小分析引论》中提出三角函数是对应的函数线与圆半径的比。他同时引入角的弧度制，平角所对的半圆弧度是 π，从此圆周率 π 也作为相当于 180°的角度值。

欧拉把无穷级数从一般工具转变为重要

的研究科目。他计算出 ξ 函数在偶数点的值，这是利用 π 所做的重要数学理论研究。欧拉利用解析方法讨论数论问题，发现 ξ 函数所满足的函数方程，引入了欧拉乘积。

在 18 世纪，关于 π 的研究随数域理论（关于数的公理体系）的深入展开而出现新的提高，不仅表现在计算 π 的精度上，更重要的还在于作为数 π 的性质上的讨论。

拉格朗日（J. L. Lagrange，1736～1813 年）和拉姆伯特（J. H. Larnbert，1728～1777 年）利用布龙克尔给出的关于 π 的无限连分数分别证明 π 是无理数。这是人类认识 π 历史上的一次突破。它表明，用有理分数或有限小数及无限循环小数表示 π 是不可能的。因此，寻求 π 的分数表示的种种努力宣告彻底失败。那么，π 作为无理数能不能表示成有限根式的形式呢？这有待于数系理论的进一步发展，事实上是在 19 世纪被完成的。

19 世纪

19 世纪是数学史上创造精神和严格精神高度发扬的时代，公理化思想取得辉煌的成就。复变函数的创立，分析学的严格化，非欧几里得几何的问世和射影几何的完善，群论和非交换代数的诞生都是生动的例证。

19 世纪初，高斯（Gauss）发表关于数论的著作《算术探讨》。在这部书中，高斯把记号标准化，同时提出自己的新思想，其内容之一是代数数的引入。高斯把一个代数数定义为满足代数方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

的任何一个实数或复数，其中 a_i 都是整数（$i=0,1,2,\cdots,n$）。在几何上，用直尺、圆规作图，所有可能作出的点对应的数，都只能是代数数。代数数以外的数，高斯称其为超越数。但是，判断一个数是不是超越数非常困难。

圆周率 π 是不是一个超越数？这是关于 π 的数性的一个深刻的论题。1882 年，林德曼（C. L. F. Lindemann）利用欧拉关系式 $e^{\pi i}=-1$ 证明 π 是超越数。π 不能是任何一个有理系数多项式的根，从而解决了古代三大几何难题之一的化圆为方的问题。π 是客观存在的实数，但我们不能在数轴上找到它的位置。

几乎所有数学的近代学科在理论研究中都涉及到 π。π 不仅因为与圆密切有关而被深入研究，更重要的是由于众多超越函数和特殊函数值以及关于周期理论都必须有 π 参与才能恰当表述。例如，在傅里叶级数、柯西积分公式、正态分布的概率密度函数、勒让德函数等重要公式中都有 π 的影子，而偏微分方程、积分方程的解的形式也都常常必须有 π。可以说，现代数学中用 π 之处不胜枚举。

20 世纪

公理化方法推动数学的发展，数学发展到一定程度反过来又要求公理系统化和严格化，这便导致从 19 世纪 70 年代一直延续到 20 世纪的所谓“公理化运动”。

1881 年，皮亚诺（G. Peano）在《算术原理新方法》中给出自然数公理体系，由此可从逻辑上严格定义正整数、负数、分数、无理数。

1899 年，希尔伯特（D. Hilbert）在《几何基础》中阐述欧几里得几何的公理系统，考虑了公理系统的独立性、相容性和完备性，并证明欧几里得几何的相容性可归结为算术的相容性。希尔伯特把古代的实质公理学发展到现代的形式公理学，解决了公理方法的逻辑理论问题。

康托尔（G. Cantor）的集合论成为 20 世纪数学研究的一个基础。但在 1902 年，罗素（B. A. W. Russell）从中发现一自相矛盾的命题——“罗素悖论”。为弥合集合论中出现的裂缝，本世纪一些数学家进行了艰难的探索。1908 年，策梅洛（E. Zermelo）开创公理集合论先河，提出第一个集合论公理系统，旨在克服悖论。20 年代，弗伦克尔（A. A. Fraenkel）给予改进和补充，得出常用的策梅洛-弗伦克尔公理系统，称作 ZF 形式系统。

1931 年，哥德尔（K. Gödel）提出“不完备性定理”，主要是指一切逻辑系统都不是完美无缺的，或真命题不完全，或系统内存在悖论。这说明公理化系统也要不断发展，以求在逐层次上的完善。

公理化运动产生一个新的数学学科——数理逻辑，它包括模型论、公理集合论、证明论和递归论四个分支。数理逻辑是计算机技术的理论基础。40 年代，经数理逻辑学家冯·诺伊曼（J. von Neumann）与图灵（A. M. Turing）的工作，造出第一台程序内存电子计算机。

电子计算机发明以后，π 值的计算产生新的飞跃。1949 年，π 被计算到 2037 位，1959 年计算到 16167 位，1967 年计算到 50 万位，1974 年计算到 100 万位，1981 年计算到 200 万位，1983 年计算到 800 多万位，目前已达到

16777216 位。计算 π 的精度还可进一步提高。这样,人类关于 π 的理论研究和数值计算在经历 4000 年以后的 20 世纪才达到完善的境地。在这个过程中,公理化方法的发展和深化起到决定性的推动作用。

公理化思想的作用和 15 世纪以后中国落后的原因

人类关于 π 的研究历史反映了公理化思想的发展史。纵观人类几千年文明史,可以说公理化思想是推动科学技术发展和社会进步的最深刻的思想源泉。

在古希腊诞生奥林匹克运动会与公理化思想不无关系。最初的奥林匹克运动只有跑步一项比赛,参加比赛者不分种族和社会地位,站在同一起跑线上,人们平等竞争,民主评定。谁先到达终点,雕塑家用大理石塑造其健美雄姿,诗人和作家描写其技巧和勇敢的伟绩。这就是公理化思想在运动场上的体现,这就是奥林匹克精神之所在。

公理化思想在社会生活中的体现就是社会的法制化,在法律面前人人平等。公理化思想在技术领域的体现就是专利法的实行,社会保护发明者的利益,有偿推广发明者的成果,向全社会公开。

15 世纪以后,曾在很多方面一直处于世界领先地位的中国逐渐衰落,到 17、18 世纪更呈现出一落千丈的局面。在探讨中国近代落后原因这一问题上,许多学者都进行过有益的研究,归结起来有政治、经济、社会、文化、地理、历史等诸多原因,但笔者认为,中国迟迟未能接受公理化思想是最根本的原因。

中华民族从来不乏能工巧匠和智力优秀者,但由于没有公理化思想的支持和相应的社会保护,发明只能保密,知识只能私有,科学技术主要靠祖传延续。祖传常常导致失传,失传后人们再从零开始努力。祖传的技术很难借鉴别人的成果,更不会推广普及。

祖冲之的数学著作《缀术》的失传是一个典型的例子。唐朝科举制度分科取士,其中“明算科”规定《算经十书》之一的《缀术》做教科书,学习四年,这就足以见得它在当时受重视的程度和其内容的博大精深。但是,这门课程后来被腐败的官僚取消,因为有些官员不懂《缀术》,设立这门课程有损他们的威信。更有甚者,《缀术》被进一步污蔑为妖术,实得查禁,以至最后失传。为此,至今人们不能明确祖冲之的圆周率究竟是用什么方法计算的。可以设想,如果在一个公理化思想普及的社会,专权者能如此恣意横行吗?

中国学术研究有一种明显的复古主义倾向,这与重要科学技术常常失传有关。中国历史上影响最为深远的一部数学书叫《九章算术》,是汉朝初年的著作。这本书记述的数学内容,对当时的世界是了不起的贡献。但从汉朝一直到清朝,将近两千年,中国数学的相当部分是在解释《九章算术》,似乎越古越好。人们普遍认为,最古老的东西一定有无尽的内涵。造成这种情况的原因,也是由于没有建立公理体系和实行公理化的研究方法。

15 至 16 世纪,公理化思想在欧洲逐渐传播开来。17 世纪初,这种思想由传教士传到中国。最早进行这项活动的是意大利耶稣会教士利玛窦(Matteo Ricei,公元 1552～1610 年),他与徐光启合译《几何原本》前 6 卷。200 多年后的 1850 年,李善兰与英国人维莱亚利(Veileyarli)合译《几何原本》后 9 卷和《代微积拾级》等书。这些用公理方法研究数学的著作和新思维没有引起封建统治者的重视,在学术界和民间也没有产生强烈的反响。但与此相反,稍后传入日本的这些著作和研究方法,受到日本政界的重视,明治皇帝带头维新,改革教育,推行公理化思想,由此日本焕然一新,跻身世界强国之列。

为什么西方科技从 15 世纪以后大大超过中国?因为他们普及公理化思想,把教育建立在公理化思想的基础上。公理化思想可保证社会平等竞争,保证科学技术连续发展,不会失传,保证每一代研究者都能站在科学的最前沿进行再创造,保证后人一定超过前人,今人一定胜过古人。中国科技知识的祖传方法,基本属于个体的智力劳动。公理化的研究方法是社会性的劳动,个人的力量怎么能胜过全社会的力量呢?因此,15 世纪西方在普及公理化思想后胜过中国就成为必然的了。其他诸多原因与这一原因相比,都不具有根本的性质。中国长治久安并保持繁荣的根本在于发展教育事业,发展教育事业的关键是大力宣扬公理化思想,加强全民族的公理意识。 □