关于测量圆柱齿轮公法线跨测齿数的探讨

抚矿工学院　李庆繁

摘　　要

公法线长度测量方法最大特点是无基准面，因此测量精度较高且不需要精加工齿轮外圆；其次，公法线长度测量工具简单、操作方便，量具不易磨损。但仍有不足之处，即当齿轮压力角发生误差时，随着跨齿数的不同，公法线长度误差变化较大。为了保证测量精度，所选跨齿数，除应保证质量的基本条件——切点必在渐开线齿廓上，还应使公法线长度由于压力角的误差所引起的误差为最小，那末应该如何选取跨齿数呢？这就是本文所要讨论的问题。

一、标准圆柱齿轮公法线跨齿数K的确定

如图1所示，对于同一齿轮当选取不同的跨齿数K时，只要量具与齿面的切点在渐开线齿廓上，公法线长就等于两相对齿廓所夹基圆弧长，如图还可知道公法线长W为

$$W=(K-1)P_b+S_b \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

式中：P_b为基节、S_b为基圆齿厚。如图中齿轮具有标准的渐开线齿廓且分度圆齿厚为周节之半，那末当齿轮的模数m、齿数Z，压力角已确定，则基节与基圆齿厚即为定值：

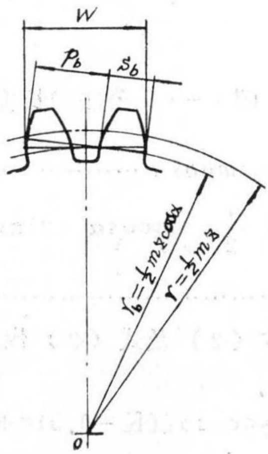

图1—a

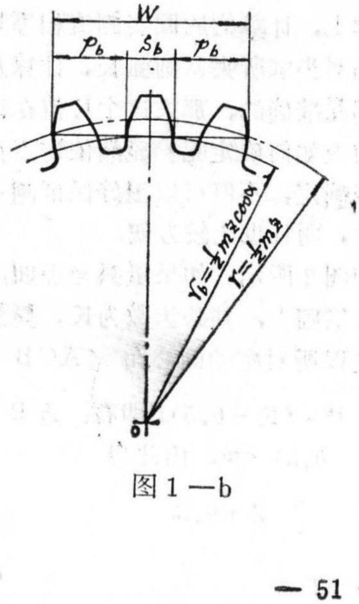

图1—b

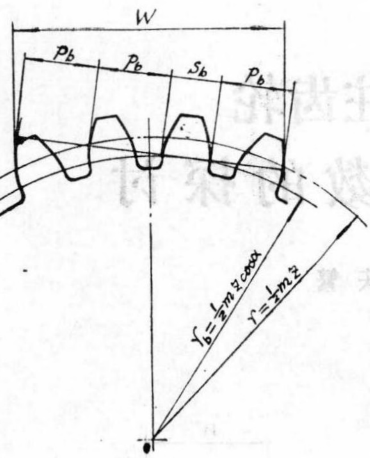

图1—c　公法线长度测量

$$P_b=\pi m\cos\alpha \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$S_b=\frac{1}{2}\pi m\cos\alpha\left(2\mathrm{inv}\alpha+\frac{\pi}{Z}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

将式（2）及式（3）代入式（1）整理得

$$W=\pi\cos\alpha[(K-0.5)\pi+Z\mathrm{inv}\alpha] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

即为公法线长度计算公式。显然此时当取用同一跨齿数K时，只要切点在渐开线齿廓上，计算值应同实测值相等且都等于两相对齿廓所夹基圆弧长，计算及测量结果都是准确的，那末这个K值在计算及测量前应如何确定呢？显然依切点在分度圆上来确定，不但可以很好保证测量的基本条件，而且也比较方便。

如图2所示，如果量具与齿面的切点恰在分度圆上，其跨齿数为K，显然公法线长度W所对应的圆心角 $\angle AOB=2\alpha$，而弧 $\overset{\frown}{AB}=(K-0.5)P$ 即有：$\overset{\frown}{AB}=2\alpha r=(K-0.5)\pi m$，由此得

$$K=\frac{\alpha}{\pi}Z+0.5$$

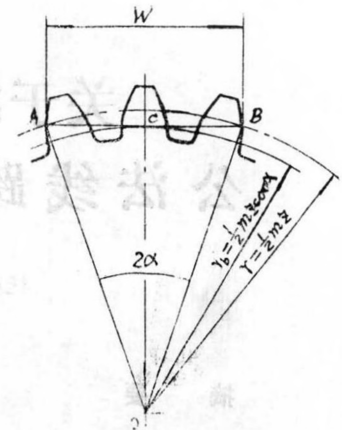

图2　标准齿轮公法线跨齿数确定

即是

$$K=\frac{\alpha^\circ}{180^\circ}Z+0.5 \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

由式（5）经圆整后确定的跨齿数K，可以保证测量的基本条件。

上面是齿轮齿廓具有标准的渐开线齿形的情况，如果齿形发生误差实际上也就是压力角发生误差时，公法线长度和跨齿数将会有什么关系呢？

将（1）式微分

$$\delta W=(K-1)\delta P_b+\delta S_b$$

由式（2）和（3）可知

$$\delta P_b=-\pi m\cos\alpha\,\delta\alpha$$

$$\delta S_b=m\sin\alpha\left(Z\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\delta\alpha。$$

当 $\alpha=20^\circ$ 时

$$\delta p_b=-1.0745m\delta\alpha$$

$$\delta s_b=0.34202(0.3491Z-1.57)m\delta\alpha$$

如果压力角存在误差 $\delta\alpha$，且当 $Z\geqslant5$ 时，若 $\delta\alpha>0$ 则有：

$\delta p_b<0$

$\delta S_b>0$

若 $\delta\alpha<0$ 则有：

$\delta p_b>0$

$\delta S_b < 0$

因此总可以找到这样一个K值：满足等式

$$|(K-1)\delta p_b| = |\delta \bar{S_b}|$$

使得

$$(K-1)\delta p_b + \delta S_b = 0$$

故知当压力角发生误差时，如果跨齿数K选取的合适，可使公法线长度误差：

$$\delta W = 0$$

但是这一K值应如何确定呢？

将式（4）对α微分，得

$$\delta W = [Z\alpha - (K-0.5)n]\ m\sin\alpha\,\delta\alpha$$

若使因$\delta\alpha$所引起的

$$\delta W = 0$$

显然只有当

$Z\alpha - (K-0.5)\pi = 0$ 时才可能

因此跨齿数$K = \dfrac{\alpha^\circ}{180^\circ} Z + 0.5$

该式恰于前所求式（5）吻合，因此可以说对于标准圆柱齿轮当压力角发生误差时，只有按式（5）所确定的跨齿数在分度圆附近测量才能使公法线长度误差δW为最小，而且可以保证测量的基本条件。因而按式（5）确定标准圆柱齿轮跨齿数是最理想的。

二、变位齿轮公法线跨齿数的确定

变位齿轮齿厚变化导致公法线长度发生变化，其公法线长度计算公式为：

$$W_k = m\cos\alpha[(K-0.5)\cdot\pi + Z\,\mathrm{inv}\alpha] + 2x\sin\alpha \quad \cdots\cdots(6)$$

在测量标准齿轮公法线长度时，使量具与齿面切点在分度圆附近是最理想的。那末对于变位齿轮是否也是如此？在目前的一些书[1][3][6]中正是以切点在分度圆处来确定变位齿轮跨齿数的，其公式推导如下：

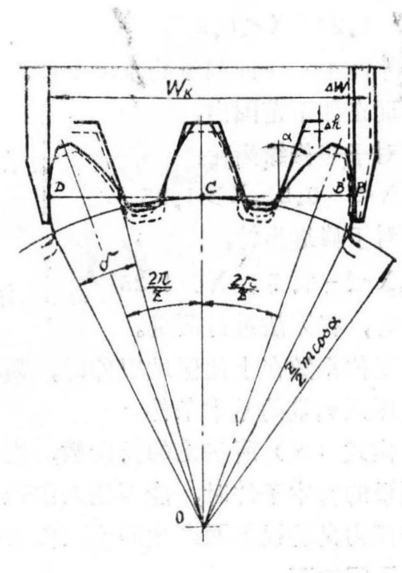

图3　变位齿轮跨齿数推导图（1）

如图3[1][3]所示，齿面与量具的切点B′和D恰在分度圆上，因此，

$\overline{DC} = \dfrac{1}{2} mZ\cos\alpha$，$\overline{DC} = \dfrac{W_k}{2}$，

$\overline{OD} = \dfrac{mZ}{2}$，由直角三角形ODC得：

$$\overline{DC} = \sqrt{\overline{OD}^2 + \overline{OC}^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

将式（6）及$\overline{DC}$，$\overline{OD}$，$\overline{OC}$代入（7）式整理得

[1][2][3][4][6]

$$K = \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} Z + 0.5 - \frac{2x}{2}\mathrm{tg}\alpha \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

用由式（8）所确定的跨齿数测量时切点必在分度圆附近。当一个齿轮的齿数和模数一经确定分度圆也就唯一的确定了。随着变位系数绝对值$|x|$的增加，齿顶圆或齿根圆就要移近分度圆以致越过分度圆，因此变位系数只有在下述范围内：

对于非修缘齿轮：

$$-0.75 < X < 0.8$$

对于修缘齿轮：

$-0.25 < X < 0.8$

才能绝对保证测量的基本条件。

而在如下范围内：

对于非修缘齿轮：

$X < -0.2$，$X > 1.25$

对于修缘齿轮：

$X < -0.7$、$X > 1.25$

时，将无法进行测量。

变位系数在上述区域以外时，则不能很好保证测量的基本条件。

由式（8）所确定的跨齿数，当能满足测量的基本条件时，能否使公法线长度由于压力角的误差而产生的误差为最小呢？证明如下：

将式（6）对α微分，得

$$\delta W_k = [Z\alpha - (K-0.5)\pi + 2\mathrm{ctg}\alpha] m \sin\alpha \, \delta\alpha$$

若使$\delta\alpha$所引起的

$$\delta w_k = 0$$

只有当

$$Z\alpha - (K-0.5)\pi + 2X\mathrm{ctg}\alpha = 0$$

时才可能，因此跨齿数K应为：

$$K = \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} Z + 0.5 + \frac{2X}{\pi}\mathrm{ctg}\alpha \quad \cdots\cdots (9)$$

由式（9）所确定的跨齿数，能使因$\delta\alpha$所产生的$\delta w = 0$。式（9）的斜率为负，跨齿数随着变位系数的增加而增加，反之则减少，以保证$\delta\alpha$引起的$\delta W = 0$；而式（8）与式（9）完全相反，故式（8）确定的跨齿数不能使因$\delta\alpha$产生δw为最小，同时也不能绝对保证测量的基本条件。

因此，对于变位齿轮按式（8）确定的跨齿数K，在分度圆附近测量就不合适了。

那末是否应由式（9）确定跨齿数呢？由上面可知式（9）确定的跨齿数K可因$\delta\alpha$引起的δW为最小，但是否能保证测量的条件，尚需证明。

将式（9）代入式（6）整理得

$$W_k = m\left(z\sin\alpha - \frac{2X}{\sin\alpha}\right) \cdots\cdots (10)$$

如图4所示，B和C为按式（9）确定的跨齿数K，在测量时量具与齿面的切

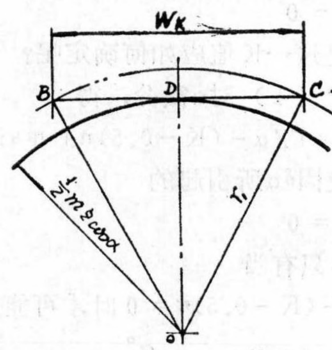

图4

点。由图可知：$DC = \frac{W_k}{2}$，$\overline{OD} = \frac{1}{2} mz\cos\alpha$，在直角三角形OCD中，

$$\overline{OC} = \sqrt{\overline{DC}^2 + OD^2} = \sqrt{\left(\frac{W_k}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} mZ\cos\alpha\right)^2}$$

将式（9）代入式（6）以此代入上式整理得

$$\overline{OC} = \frac{1}{2} m \sqrt{(Z+2x)^2 + 4\mathrm{ctg}^2\alpha x^2}$$

当$\alpha = 20^\circ$时

$$\overline{OC} = \frac{1}{2} m \sqrt{(Z+2x)^2 + 30.2x^2} \quad \cdots\cdots (11)$$

由式（11）可看出，$\overline{OC}$大于齿身中央所在圆半径$r_x = \frac{1}{2} m(Z+2X)$，并随着$|X|$增加而增加，使得切点C移近齿

顶。经进一步推证可知式（9）对于标准非修缘齿轮所有不使齿轮变尖的变位系数所确定的跨齿数K都能满足测量的基本条件。但对于修缘齿轮变位系数在：

$$-(0.22+0.18\sqrt{Z+0.28})<X<0.18\sqrt{Z+0.28}-0.22$$

范围内时，由式（9）确定的跨齿数才能绝对保证测量的基本条件，而当超出这一范围时，按式（9）所确定的理论跨齿数尾数为0.5～0.9时，则应校验圆整后得到的跨齿数测量时切点是否落在渐开线齿廓上。这样给实际应用带来麻烦，不能在任何情况下都适用。

如若在任何情况下都适用即绝对保证测量的基本条件，只有使量具与齿面的切点在齿身中央即在$(Z+2X)m$的圆周上才可能，尽管这样会存在误差，但跟公法线的长度公差比较起来是要小得多，一般可忽略不计。对精度要求较高的齿轮来说，测量时仍然要考虑这个问题。[3] 下面来推导切点在齿身中央时的跨齿数公式。

如图5所示，量具与齿面切点恰在直径为$(Z+2X)m$的圆周上，α_x为切点C处的压力角，在直角三形ODC中，

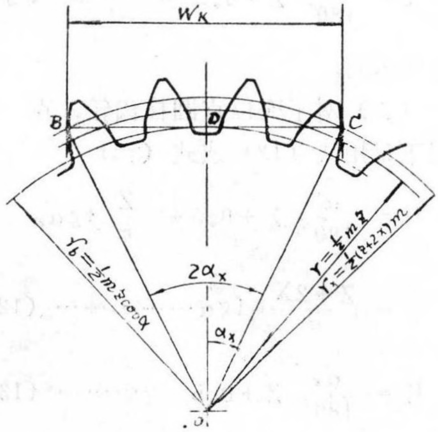

图5　变位齿轮跨齿数推导图（2）

$$\overline{OD}=\frac{1}{2}mZ\cos\alpha,$$

$$\overline{OC}=\frac{1}{2}m(Z+2x)、$$

$$\overline{DC}=\frac{W_k}{2}、\overline{DC}=\overline{OD}\,tg\alpha_x$$

将$\overline{OD}$、$\overline{DC}$代入上式得

$$\frac{W_k}{2}=\frac{1}{2}mz\cos\alpha\,tg\alpha_x$$

将式（6）代入上式整理得

$$K=\frac{\alpha^\circ}{180^\circ}Z+0.5+\frac{Z}{\pi}tg\alpha_x-\frac{Z+2X}{\pi}tg\alpha\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots（12）$$

式中α_x由下式确定

$$\cos\alpha_x=\frac{2\cos\alpha}{Z+2X}$$

由式（12）所绘制的曲线同一些资料〔2〕〔3〕〔5〕〔6〕〔7〕〔8〕中的曲线基本一致，用起来比较方便。

式（12）比较繁索，为了简便起见，假设在直径$(Z+2X)\cdot m$的圆周上的齿廓角与齿间角相等，当量具与齿面切点恰在$(Z+2x)m$的圆周上时，由图5知

$$2\alpha^\circ_x=\frac{360^\circ}{Z}K-\frac{180^\circ}{Z}$$

故　$$K=\frac{\alpha_x^\circ}{180^\circ}Z+0.5\cdots\cdots\cdots（13）$$

式中α_x由下式确定

$$\cos\alpha_x=\frac{Z\cos\alpha}{Z+2X}$$

以上各式之K值均以四舍五入法圆整。

显然式（13）要比式（12）简单的多，用起来比较方便，而且式（13）可以很好保证测量的基本条件。

尽管式（12）的推导过程是精确的而式（13）是在假设条件下推导的，但它们

同样都只能保证测量的基本条件，而不能使公法线长度因压力角的误差所引起的误差为最小，它们的作用是同等的，因此式（12）同式（13）是等价的。

三、结　论

上面对于如何确定圆柱齿轮跨齿数的问题进行了讨论，下面就一些具体问题谈一谈个人的看法。

1、确定标准圆柱齿轮公法线跨齿数K时，有的书〔3〕〔5〕〔9〕中仅笼统地说：切点在根部或顶部所测得的公法线长度“就不准确”。这是不太合适的，因为既已说“根部或顶部”就不是齿根或齿顶，而是齿廓曲面的一部分，这样就会给人以这样一种误解。对于标准圆柱齿轮，其轮齿根部或顶部的齿廓已不是标准或根本不是渐开线齿廓了。

2、关于确定变位齿轮公法线跨齿数K

（1）有的书〔6〕中认为：“量具与齿面的切点不在分度圆附近因而引起较大误差”。这一提法是不合适的。它没有说明这一“误差”是怎样引起的，使人不可理解。如前所述公法线长度若因齿形误差即压力角的误差$\delta\alpha$产生的误差δw为最小时，所跨齿的切点是随着变位系数$|X|$的增加而远离分度圆的，当变位系数$|X|$较大时切点在分度圆附近却要因$\delta\alpha$引起较大的δw，甚至无法测量。

（2）有的书〔1〕〔2〕〔3〕〔4〕〔6〕〔7〕中给出本文中的式（8）：

$$K=\frac{\alpha^{\circ}}{180^{\circ}}Z+0.5-\frac{2x}{\pi}tg\alpha \quad \cdots\cdots(8)$$

及当$\alpha=20^{\circ}$而由式（8）简化得到的

$$K=0.111Z+0.5-0.232tg\alpha \quad \cdots\cdots(8')$$

是不合适的。如前由式（8）所确定的跨齿数不仅不能保证测量的基本条件，而且将因$\delta\alpha$引起较大的δw。

（3）有的书〔2〕〔4〕〔6〕中将式（8）及由式（12）所确定的曲线等同起来混为一谈有欠妥当。因式（8）及式（12）的斜率符号相反，而且所要求的测量部位不同故结果不同。

（4）有的书〔5〕中给出本文中的式（9）

$$K=\frac{\alpha^{\circ}}{180^{\circ}}Z+0.5+\frac{2X}{\pi}ctg\alpha \quad \cdots\cdots(9)$$

由于该式不能在任何情况都适用，书中对此未加说明而直接给出式（9）有些不大稳妥。另外还认为式（9）是近似的，而精确的是前述式（12）的变形，这一提法值得研究，因为式（12）及其变形确定的跨齿数仅能保证测量的基本条件，而不能因压力角的误差$\delta\alpha$而使得公法线长度误差δw为最小。但是式（9）确定的跨齿数却能因$\delta\alpha$使δw为最小。

3、公法线跨齿数K的确定

（1）对于标准直圆柱齿轮，采用式（5）

$$K=\frac{\alpha^{\circ}}{180^{\circ}}Z+0.5 \quad \cdots\cdots(5)$$

是最理想的。

（2）对于变位直圆柱齿轮，在一般情况下采用式（12）或式（13）

$$K=\frac{\alpha^{\circ}}{180^{\circ}}Z+0.5+\frac{Z}{\pi}tg\alpha_x-\frac{Z+2X}{\pi}tg\alpha \quad \cdots\cdots(12)$$

$$K=\frac{\alpha_x}{180^{\circ}}Z+0.5 \quad \cdots\cdots(13)$$

上两式中的α_x由下式确定

管咀泄流在铸造生产中的应用

——抚矿工学院　许 龙 元

摘　要

在出气口内正确地安放管咀，能提高型腔排放气体的能力，减少铸件中的气孔以及消除跑火现象，

一、实　例

图1为OPT—307空气压缩机高压缸活塞的铸型示意图，活塞外径为305毫米，高219毫米，壁厚15毫米，静重45公斤，泥芯体积约为0.01立方米。该泥芯未有芯头，用泥芯撑支承，这样铁水注入铸型后泥芯全被铁水包围，泥芯排出的气体只能通过φ30毫米的4个工艺孔排出。实践证明这种工艺孔不能很好地排放气体。因为气体排放不好，型腔内的气体压力过大，这是该铸件产生气孔以及浇注后发生跑火的一个原因（本文所讨论的跑火是压铁重量和分箱面间隙都合理的情况下发生的跑火现象）。

为了提高型腔的排气能力，在出气口内安放外径与出气口一样的铁管，如图2所示。结果不仅消除了跑火现象也消除了气孔。原先都未想到会有这样的理想效果。出气口上安放管子，得到这么明显的效果，是因为它提高了型腔的排气能力，

$$\cos\alpha_x = \frac{Z\cos\alpha}{Z+2X}$$

是比较理想的。显然式（13）要简单的多，用起来比较方便。另外由式（12）绘制的曲线确定K值更为方便。

参 考 资 料

〔1〕朱　罗：“变位齿轮”，1965　机械工业出版社。

〔2〕北京业余机械学院工人班集体编写：“齿轮原理与制造”1970，科学出版社。

〔3〕李容来：“圆柱齿轮公法线长度测量”，1974，机械工业出版社。

〔4〕张宗仁：“煤矿机械齿轮的测绘与改造”，1977，煤炭工业出版社。

〔5〕中国机械工程学会主编：“机修手册圆柱齿轮传动”（修订本）1977，机械工业出版社。

〔6〕西北工业大学机械原理与机械零件教研组编：“机械设计”（上册）1980，人民教育出版社。

〔7〕《公差与技术测量》编写组：“公差与技术测量”1980，辽宁人民出版社。

〔8〕会田俊夫：“机械の研究”，VOL14№1、1962。

〔9〕雨角宗晴：“齿车の基础と测量”，1962：诚文堂新光社。

〔10〕仙波正庄：“齿车”第二卷，1975，日刊工业新闻社。