

# 有限元 - 界面元混合模型及其应用

尹华伟, 易伟建, 刘 艳

(湖南大学 土木工程学院, 湖南 长沙 410082)

**摘要:** 推导得出了一个简化过渡界面单元的单元刚度矩阵. 采用界面元 - 有限元的混合模型来模拟三维土 - 结构体系, 并采用一致边界来模拟波向无穷远域地基的传播作用. 然后编制了一个可用于进行三维土 - 结构非线性地震反应分析的程序, 并用该程序对一框架结构进行了考虑土 - 结构相互作用影响的地震反应分析. 最后总结了各种非线性因素和土 - 结构相互作用效应对结构地震反应的影响规律. 图 11, 参 9.

**关键词:** 有限元; 界面元; 有限元 - 界面元混合模型; 过渡界面元; 土 - 结构相互作用; 一致边界; 地震反应

**中图分类号:** TU311.4

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1672-9102(2006)04-0041-06

鉴于工程结构的复杂性, 绝大多数结构均找不到解析解, 只好依赖于数值方法去寻找近似解. 因此各种数值分析方法也就伴随着计算机的出现逐渐发展成熟起来. 如有限元法、边界元法、离散元法和刚性有限元法等. 尤其值得一提的是近年内逐渐发展起来的流形元法与刚体 - 界面元法, 特别适用于不连续体分析.

由于进行土 - 结构相互作用地震反应分析时, 存在地基和基础两种不同材料介质的间断面, 传统有限元法通常采用基于 Goodman 单元的节理单元来处理介质间断面, 但 Goodman 单元存在法向和切向刚度确定困难的弊病. 因此有必要提出一种新的适用于求解不连续介质问题的数值方法. 受 Kawai 刚体弹簧元思路的启发, 卓家寿等提出了界面元离散模型和界面元法. 界面元法假设单元变形累积于界面, 块体元只有刚体位移, 用其形心点的广义位移参数加以描述<sup>[1]</sup>. 且不需确定界面法向和切向刚度, 单元刚度矩阵与有限元一样, 可由虚功原理或广义变分原理得出<sup>[1-2]</sup>.

同其它数值分析方法相比, 界面元法具有适用性强、精度高、计算便捷和相容性强等优点. 但在某些问题的分析中, 自由度比有限元法大, 计算效率不如有限元法; 输入数据等准备工作也比有限元法繁重. 但由于它具有良好的相容性, 引进适当的过渡界面元

便可组建相应的混合模型. 因此, 作者采用界面元 - 有限元混合模型进行土 - 结构相互作用地震反应分析. 并给出一类便于实际应用的三维过渡界面元刚度矩阵的显式格式.

## 1 简化三维过渡界面元

采用界面元 - 有限元混合分析模型时, 存在块体元与有限元的结合问题. 卓家寿等通过引入图 1 所示的过渡界面元将有限元区域和界面元区域衔接起来<sup>[1,3]</sup>. 由广义变分原理可得过渡界面元的刚度矩阵为

$$k_{ij} = \int_{\Omega} N^T L^T D L N^* dS \quad (1)$$

$$N^* = [N_{FE}, -N_{ISE}] \quad (2)$$

其中  $N_{FE}$  和  $N_{ISE}$  分别为有限元和界面元界面结点的形函数,  $L$  为块体元局部坐标轴与整体坐标轴夹角的方向余弦组成的转换矩阵,  $D$  为过渡界面元局部坐标下的弹性矩阵,  $L$  和  $D$  的表达式见文献[1]. 式(2)可写成如下形式

$$N^* = [N_1 I, N_2 I, N_3 I, N_4 I, -I, -N] \quad (3)$$

其中 
$$N = \begin{bmatrix} 0 & z-z_g & y_g-y \\ z_g-z & 0 & x-x_g \\ y-y_g & x_g-x & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

收稿日期: 2006-04-30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50378034); 湖南大学校基金重点项目(521101889)

作者简介: 尹华伟(1972-), 男, 湖南洞口人, 博士, 主要从事结构抗震与土 - 结构动力相互作用研究.

(3)式中  $N_1 \sim N_4$  为界面元结点形函数,  $I$  为  $3 \times 3$  阶单位子矩阵,  $(x_g, y_g, z_g)$  为块体元的形心坐标.

由上述积分方法求三维过渡界面元的刚度矩阵, 不但计算工作量很大, 而且非常复杂. 因而本文只考虑在水平或垂直方向设置过渡界面元, 且与界面元接触的有限单元为规则的六面体单元. 这使三维过渡界面元的刚度矩阵得以大大简化.

以平行于  $xoy$  平面的矩形过渡界面元为例, 单元简图及参数见图 1. 设过渡界面元的面积为  $S$ , 对于矩形单元, 刚度矩阵积分可划分为如图 2 所示的两个三角形区域进行, 第  $i$  个三角形的面积用  $S_i$  表示, 其余参数的物理意义参见图 2. 则(3)式中的形函数  $N_1 \sim N_4$  可表示为

$$\begin{cases} N_1 = (x_3 - x)(y_3 - y) / S \\ N_2 = (x - x_1)(y_3 - y) / S \\ N_3 = (x - x_1)(y - y_1) / S \\ N_4 = (x_3 - x)(y - y_1) / S \end{cases} \quad (5)$$

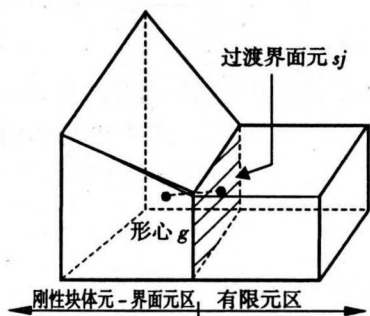


图 1 过渡界面元示意图

Fig.1 Schematic diagram of transitional interface element

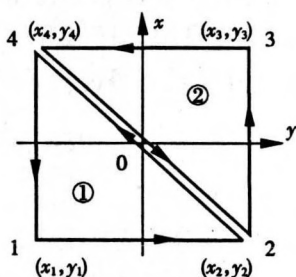


图 2 矩形过渡界面元

Fig.2 Rectangular transition interface element

整体坐标下的弹性矩阵  $D^*$  和局部坐标下的弹性矩阵  $D$  的关系为

$$D^* = L^T D L \quad (6)$$

由(1)式积分可得

$$k_{ij} = \begin{bmatrix} K^{11} & & & \\ K^{21} & K^{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ K^{61} & K^{62} & \dots & K^{66} \end{bmatrix} \quad (7)$$

对四结点过渡界面元和八结点有限元, (7) 式是  $18 \times 18$  阶的矩阵, 式中的前  $15 \times 15$  个元素由(8)式和(9)式确定.

$$K^{\bar{v}} = N_{ij} D^* \quad (i \leq 5, j = 1 \sim i). \quad (8)$$

$$\begin{cases} N_{11} = N_{22} = N_{33} = N_{44} = S/9, N_{55} = 1 \\ N_{21} = N_{32} = N_{41} = N_{43} = S/18 \\ N_{31} = N_{42} = S/36 \\ N_{51} = N_{52} = N_{53} = N_{54} = -S/4 \end{cases} \quad (9)$$

(8)式中  $K^{\bar{v}}$  为  $3 \times 3$  阶的分块矩阵, 各分块矩阵均为对称矩阵. 设矩形过渡界面元  $x$  和  $y$  方向边长分别为  $a$  和  $b$ , 并令  $c = z_g - z$ . 则左下角的  $3 \times 15$  个元素可由(10)~(12)式确定. 右下角分块矩阵元素可由(13)式确定.

$$K^{\bar{6}} = \begin{bmatrix} 0 & N_{21}^i D_{22}^* & N_{31}^i D_{33}^* \\ -N_{21}^i D_{11}^* & 0 & N_{32}^i D_{33}^* \\ -N_{31}^i D_{11}^* & -N_{32}^i D_{22}^* & 0 \end{bmatrix} \quad (i=1 \sim 4). \quad (10)$$

$$\begin{cases} N_{ij}^i = 0, N_{12}^i = cS/4 \quad (i=1 \sim 4, j=1 \sim 3) \\ N_{31}^1 = N_{31}^2 = -N_{31}^3 = -N_{31}^4 = -bS/24 \\ N_{32}^1 = -N_{32}^2 = -N_{32}^3 = N_{32}^4 = bS/24 \\ N_{jk}^i = -N_{kj}^i \quad (i=1 \sim 4, j=1 \sim 2, k=(j+1) \sim 3) \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} K_{11}^{65} = K_{22}^{65} = K_{33}^{65} = K_{23}^{65} = K_{32}^{65} = K_{13}^{65} = K_{31}^{65} = 0 \\ K_{21}^{65} = -cSD_{11}^*, K_{12}^{65} = cSD_{22}^* \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} k_{ij16,16} = c^2 SD_{22}^* + b^2 D_{33}^* / 12 \\ k_{ij17,16} = -c^2 SD_{21}^{**} \\ k_{ij17,17} = c^2 SD_{11}^* + a^2 D_{33}^* / 12 \\ k_{ij18,16} = -b^2 D_{31}^* / 12 \\ k_{ij18,17} = -a^2 D_{32}^* / 12 \\ k_{ij18,18} = (b^2 D_{11}^* + a^2 D_{22}^*) / 12 \end{cases} \quad (13)$$

其它各元素可由单元刚度矩阵的对称性确定, 而平行于  $yoz$  与  $zox$  平面的矩形过渡界面元的单元刚度矩阵只要交换相应坐标参数即可.

## 2 土-结构相互作用分析模型

采用有限元-界面元的混合模型模拟三维土-箱(筏)基-上部结构. 即将基础及基础周围地基离散为块体元-界面元组合而成的离散体, 用界面元法分析; 上部结构采用有限元模型; 其余大部分地基土仍

采用有限元模型. 有限元与块体-界面元的衔接由本文过渡界面元来实现.

对于刚性较好的块体基础, 将其作为一个块体元, 上部框架杆单元与块体基础相连的  $i$  端位移通过 (14) 式与块体基础形心位移耦合.

$$\{u\}_b = [G]\{u\}_g. \quad (14)$$

$$\{u\}_i = \{u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z\}^T. \quad (15)$$

$$\{u\}_g = \{u_g, v_g, w_g, \theta_{xg}, \theta_{yg}, \theta_{zg}\}^T. \quad (16)$$

$$[G] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_i - z_g & y_g - y_i \\ 0 & 1 & 0 & z_g - z_i & 0 & x_i - x_g \\ 0 & 0 & 1 & y_i - y_g & x_g - x_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

其中  $\{u\}_i$  和  $\{u\}_g$  分别为框架杆单元与基础块体元相连的  $i$  端位移列向量和块体元形心位移列向量,  $(x_i, y_i, z_i)$  为杆  $i$  端在整体坐标系中的坐标.

由基岩输入水平单向地震波, 质点振动方向平行于  $zox$  平面. 则地基可采用如图 3 所示离散模型, 图 3 为 1/4 离散模型. 该离散模型可以看成是由一系列平行于  $zox$  平面和平行于  $yozy$  平面的薄层相互交叉, 并忽略四个角域地基的作用后, 再用垂直于  $z$  轴的水平面切割而成. 薄层的交叉区采用有限元或有限元-界面元混合模型.

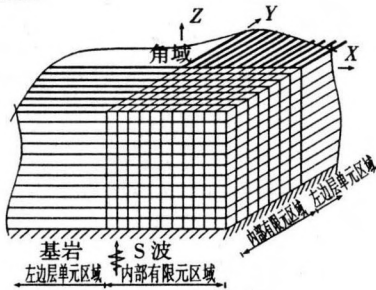


图 3 地基离散模型  
Fig.3 Mesh of subgrade

与  $zox$  平面平行的远域地基薄层采用模拟 P 波向无穷远传播的一致边界进行截断处理<sup>[4]</sup>. 而与  $yozy$  平面平行的远域地基薄层采用模拟 SH 波向无穷远传播的一致边界进行截断处理<sup>[9]</sup>.

进行考虑土-结构相互作用(以下简称 SSI)效应的结构地震反应分析时, 地基土与基础属不同材料, 二者之间存在交界面. 在地震尤其是强烈地震作用下, 地基-基础交界面上可能会出现脱离和滑移现象, 基础与地基接触界面采用弹塑性界面单元来处理. 由增量弹塑性理论可得界面元的弹塑性单元刚度矩

阵  $k_{ep}$ , 其表达式和推导过程见文献[6].

在此基础上作者编制了一个可进行三维土-结构动力相互作用非线性分析的程序. 由于三维土-结构动力相互作用非线性分析模型的自由度数大, 因此程序使用 14 个高斯积分点, 各积分点坐标及权重见文献[7]. 为避免直接解巨型方程组、使大型结构动力分析能够采用隐式积分格式和便于采用逐单元计算技术, 程序采用预处理共轭梯度法对方程组进行迭代求解<sup>[8]</sup>. 可选用显示积分<sup>[9]</sup>或迭代-隐式积分的动力积分方法. 采用逐单元计算技术, 所有计算均可在单元一级的水平上进行, 不必进行总刚度矩阵的组装.

### 3 数值算例

上部结构平面布置见图 4, 土-结构体系立面或剖面见图 5. 块体基础尺寸  $6\text{ m} \times 6\text{ m} \times 0.5\text{ m}$ , 采用 C30 混凝土浇筑. 上部结构为 7 层 2 榀 1 跨钢筋砼框架, 层高  $3\text{ m}$ , 总高  $21\text{ m}$ . 1~6 层质量为  $4.4 \times 10^4\text{ kg}$ , 顶层质量为  $4.1 \times 10^4\text{ kg}$ . 构件材料采用 C30 混凝土和 HRB400 钢筋, 截面尺寸和配筋见图 6. 地基为单一均匀土层, 水平方向取 5 倍块体基础尺寸, 深度方向取  $15\text{ m}$ , 用  $0.5\text{ m} \times 0.5\text{ m} \times 0.5\text{ m}$  的网格离散. 土泊松比取 0.3, 剪切波速取  $180\text{ m/s}$ , 密度取  $1900\text{ kg/m}^3$ , 粘聚力取  $40\text{ kPa}$ , 内摩擦角为  $17^\circ$ . 由基岩输入加速度幅值为  $200\text{ gal}$  的 Elcentro 波, 方向见图 4. 据对称性取 1/2 结构进行计算. 采用本文程序对结构进行了考虑与不

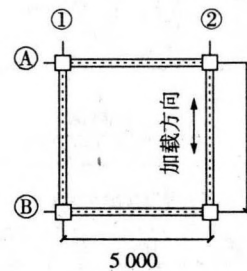


图 4 结构平面布置图  
Fig.4 Plan of the structure

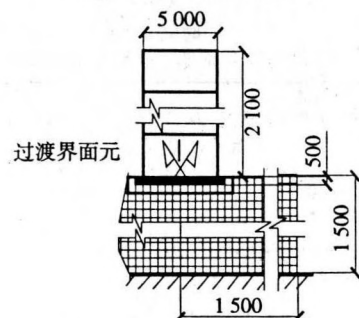


图 5 结构立(剖)面图  
Fig.5 Elevation of the structure

考虑 SSI 效应的地震反应时程分析. 分析时分别考虑了地基土非线性、地基 - 基础接触非线性、地基非线性与地基 - 基础接触非线性、上部结构非线性和同时考虑上述所有非线性对结构反应的影响. 下面给出部分计算结果如图 7~11 所示.

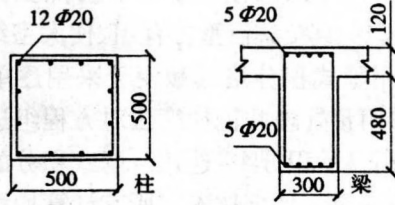
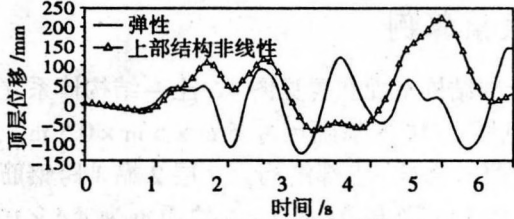
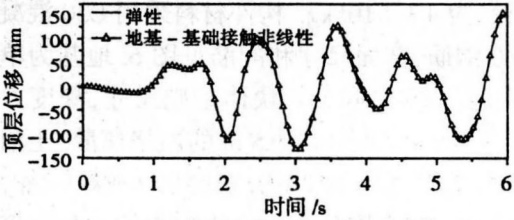


图 6 构件尺寸及钢筋布置

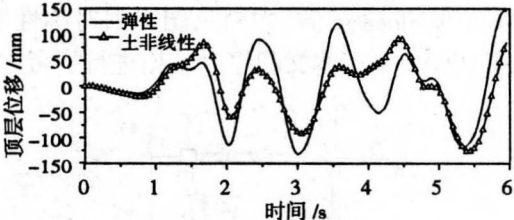
Fig.6 Dimension and reinforcement of element



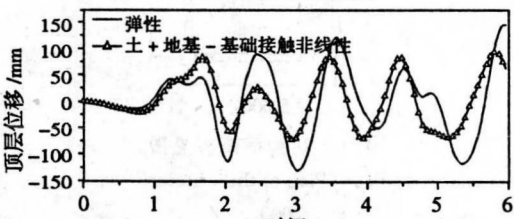
(a)考虑上部结构非线性



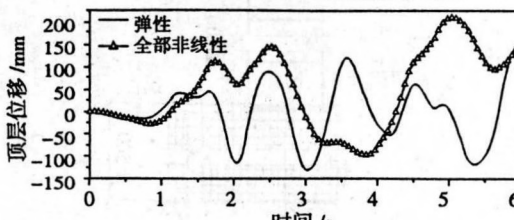
(b)考虑地基-基础接触非线性



(c)考虑土非线性



(d)考虑土与地基-基础接触非线性

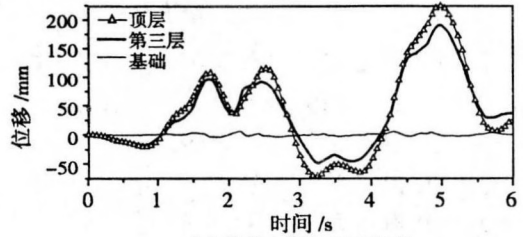


(e)考虑全部非线性因素

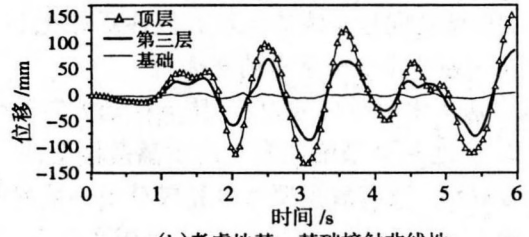
图 7 非线性对顶层位移的影响

Fig.7 Non-linear affection on the top displacement

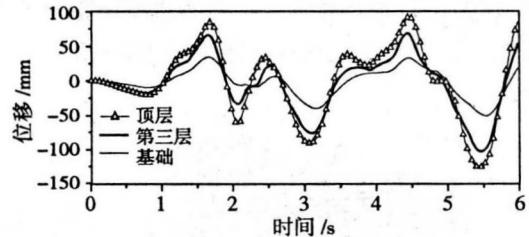
由图 7 可知:仅考虑地基 - 基础接触非线性对结构顶层位移的影响不大,较弹性顶层位移略有增大.如考虑地基土体非线性,上部结构为弹性,顶层位移较弹性顶层位移小,此时相当于是建在场地土相对较软的刚度较大结构在硬土场地地震波作用下的反应.考虑上部结构非线性后,结构顶层位移则比弹性顶层位移有很大的增加,且由图 7(a)和图 7(e)可以看出,反应周期也有所延长.



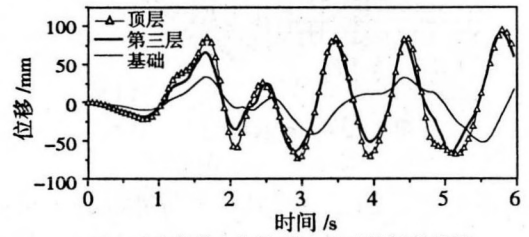
(a)考虑上部结构非线性



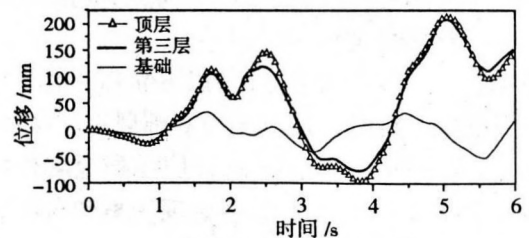
(b)考虑地基-基础接触非线性



(c)考虑土非线性



(d)考虑土与地基-基础接触非线性



(e)考虑全部非线性因素

图 8 非线性对楼层位移的影响

Fig.8 Non-linear affection on story displacement



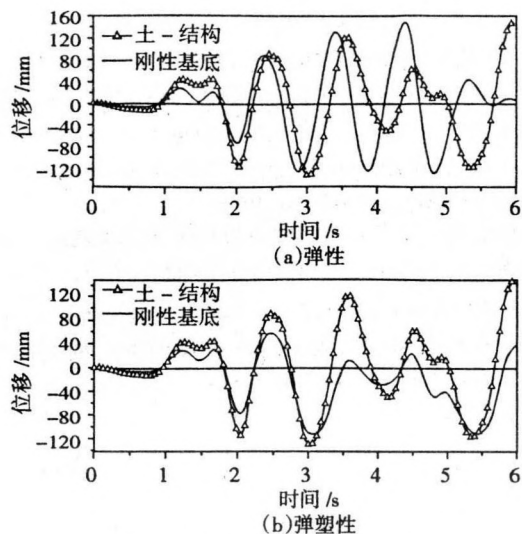


图9 结构顶层位移时程曲线  
Fig.9 Time history curve of top story displacement

由图8考虑各种非线性因素以及各非线性因素之间的组合影响后部分楼层与基础的位移时程曲线可以看出:基础位移主要由地基土体非线性所致,图8(c)~(e)考虑了地基土非线性影响的基础位移较大;图8(a)和图8(b)未考虑地基土非线性影响的基础位移就很小.由此可见整个体系并未出现以下部地基振动为主的振动,下部地基土截取的计算区域结合所采用的人工边界能够满足无穷远域地基对波的辐射要求.

由图9中结构分别在弹性和弹塑性状态下,考虑与不考虑SSI效应顶层位移时程曲线的比较可知:弹性状态下SSI效应对结构顶层位移反应的影响较小;而弹塑性状态下SSI效应对结构顶层位移反应的影响变大.

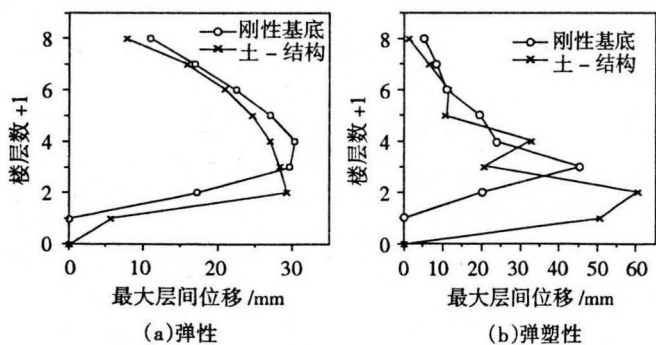


图10 结构最大层间位移  
Fig.10 Maximum story drift of the structure

由图10中结构分别处于弹性和弹塑性状态,考虑与不考虑SSI效应的最大层间位移的比较可知:弹性状态下SSI效应对结构最大层间位移的影响较小,考虑与不考虑SSI效应的最大层间位移大致相当.考

虑非线性因素的影响后,结构薄弱层位置由未考虑SSI效应的第二层转变为考虑SSI效应后的第一层,最大层间位移值也比未考虑SSI效应时要大,且两者之间的差值也变大.

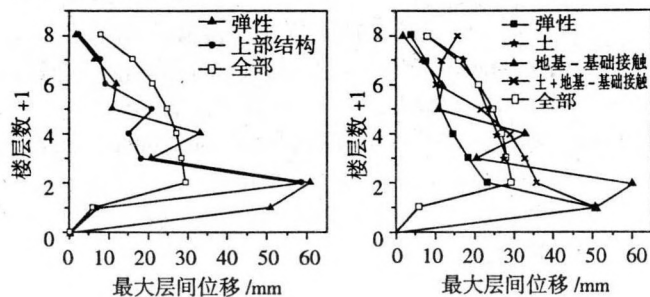


图11 最大层间位移比较  
Fig.11 Comparison of various maximum story drift

由图7可以看出:上部结构为非线性,下部地基-基础为弹性时,结构顶层水平位移与基础水平位移的差值变大,说明层间位移的增大主要是由上部结构非线性引起.同样,由图11也可看出,考虑上部结构非线性后,结构最大层间位移增大.

## 4 结论

(1)弹性状态下SSI效应对结构地震反应的影响较小;考虑非线性因素的影响后,SSI效应对结构地震反应的影响变大;

(2)计算表明SSI效应对结构地震反应的影响并不都是有利的;

(3)对无穷域地基的计算范围取5倍基础尺寸,再结合人工边界处理后,基础没有出现很大的整体漂移.此时基础平移主要是由地基土体的材料非线性所引起;

(4)考虑上部结构非线性影响后,结构顶层位移与基础位移的差值变大,结构最大层间位移值增加.

## 参考文献:

[1] 卓家寿,章青.不连续介质力学问题的界面元法[M].北京:科学出版社,2000.  
ZHUO Jia-shou, ZHANG Qing. *Interface Stress Element Method of Discontinuous Mechanics*[M]. Beijing: Science Press, 2000.  
[2] 高向玲,李杰.钢筋与混凝土粘结结构关系的数值模拟[J].计算力学学报,2005,22(1):73-77.  
GAO Xiang-ling, LI Jie. Numerical Simulation of Constitutive Relation Between Reinforcement and Concrete[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2005, 22(1): 73-77.  
[3] 章青,周资斌,卓家寿.分区界面元-有限元-无限元混合模型[J].计算力学学报,2005,22(1):8-12.  
ZHANG Qing, ZHOU Zi-bin, ZHUO Jia-shou. Mixed Model for

- Partitioned Interface Stress Element Method-Finite Element Method-Infinite Element Method[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2005, 22(1): 8-12.
- [4] 尹华伟. 土与结构动力相互作用的计算方法研究[D]. 长沙: 湖南大学土木工程学院, 2005.
- YIN Hua-wei. *The Research on Analysis Method of Soil-Structure Dynamic Interaction* [D]. Changsha: Civil Engineering College of Hunan University, 2005.
- [5] LYSMER J, WASS G. Shear Wave in Plane Infinite Structures[J]. *J Eng Mech Div ASCE*, 1972, 98(EM1): 85-105.
- [6] 高培正. 动力弹塑性刚体界面元法 [J]. *工程力学*, 1996, 13 (4): 135-144.
- GAO Pei-zheng. Dynamic Elastoplastic Rigid-Body Surface Element Method[J]. *Engineering Mechanics*, 1996, 13(4): 135-144.
- [7] KOHNKE P. *Ansys Theory Manual*[K]. PA USA: SASIP, Inc, 2001.
- [8] PHOON K, CHAN S, TOH K, *et al.* Fast Iterative Solution of Large Undrained Soil-Structure Interaction Problems [J]. *Int J Numer Anal Meth Geomech*, 2003, 27(3): 159-181.
- [9] 张晓志, 谢礼立. 结构动力反应分析中的一种显式输入反演方法[J]. *地震工程与工程振动*, 2001, 21(1): 37-42.
- ZHANG Xiao-zhi, XIE Li-li. An Explicit Method for Dynamic Input Reverse Problem [J]. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 2001, 21(1): 37-42.

## Mixed Interface stress Element-Finite Element Model with Its Application

YIN Hua-wei, YI Wei-jian, LIU Yan

(Civil Engineering College, Hunan University, Changsha 410082, China)

**Abstract:** A stiffness matrix of transition interface element was deduced. Mixed model for interface stress element-finite element method was adopted to simulate the spatial soil-structure system. And consistent boundary was selected to simulate the propagation of wave to exterior infinite media. A non-linear time history analysis program for computing the spatial soil-structure seismic response was compiled, and then the seismic response of a frame was computed with it. The laws of various non-linear and SSI effect on the structural seismic response were summarized based on the numerical results. 11 figs., 9 refs.

**Key words:** finite element; interface stress element; mixed model for interface stress element-finite element method; transition interface element; soil-structure interaction; consistent boundary; seismic response

**Biography:** YIN Hua-wei, born in 1972, Dr., structural earthquake resisting and soil-structure dynamic interaction.