

Rigidité à la torsion d'un cylindre présentant une double périodicité

M'barek Taghite^{a,*}, Khalid Taous^b, Mohamed Haboussi^a, Gérard Maurice^a,
Hélène Lanchon-Ducauquis^a

^a Laboratoire d'énergétique et de mécanique théorique et appliquée, CNRS-INPL, 2, avenue de la Forêt de Haye, BP 160, 54504 Vandœuvre cedex, France

^b Laboratoire de mathématiques et applications de Metz, Université de Metz, île du Saulcy, 57045 Metz cedex, France

Reçu le 19 décembre 2005 ; accepté après révision le 16 octobre 2006

Disponible sur Internet le 28 novembre 2006

Présenté par Évariste Sanchez-Palencia

Résumé

On estime le module équivalent de rigidité à la torsion pour un cylindre dont la section multiconnexe présente une double porosité irrégulière. On met en évidence les complications du modèle générées par le contraste d'échelles entre les zones poreuses et compactes. *Pour citer cet article : M'B. Taghite et al., C. R. Mecanique 334 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

The objective of the present Note is to estimate the equivalent torsion rigidity modulus for a cylinder whose cross-section Σ exhibits a periodical distribution of porous zones Σ_p . Taking into account a second, finer, periodical distribution of pores in Σ_p , we have to use the homogenization method in a bi-periodical context. However, the contrast of scales at the interfaces between Σ_p and the compact part Σ_c of Σ , requires some subtle fitting up of this method. Finally, we point out the existence of boundary layers around the interfaces $\partial\Sigma_p$ and we estimate the weakening of the torque rigidity. *To cite this article: M'B. Taghite et al., C. R. Mecanique 334 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Milieux poreux ; Homogénéisation ; Multipériodicité ; Contraste d'échelles

Keywords : Porous media; Homogenization; Multiperiodicity; Contrast of scales

1. Introduction

Le problème de torsion dite de Saint Venant d'un arbre cylindrique permet (en général) de ramener la recherche des 9 inconnues de l'ingénieur (composantes respectives des champs de contraintes et de déplacements) à la détermination d'une unique inconnue scalaire θ^ε , appelée fonction de contraintes ; cette dernière est, dans le cas d'un équilibre quasi-statique, solution d'un problème aux dérivées partielles, de type elliptique, formulé sur la partie $\Sigma^\varepsilon \subset \Sigma$ de la section

* Auteur correspondant. Tél. : +33 383 59 55 94 ; fax : +33 383 59 55 51.
Adresse e-mail : taghit90@ensem.inpl-nancy.fr (M'B. Taghite).

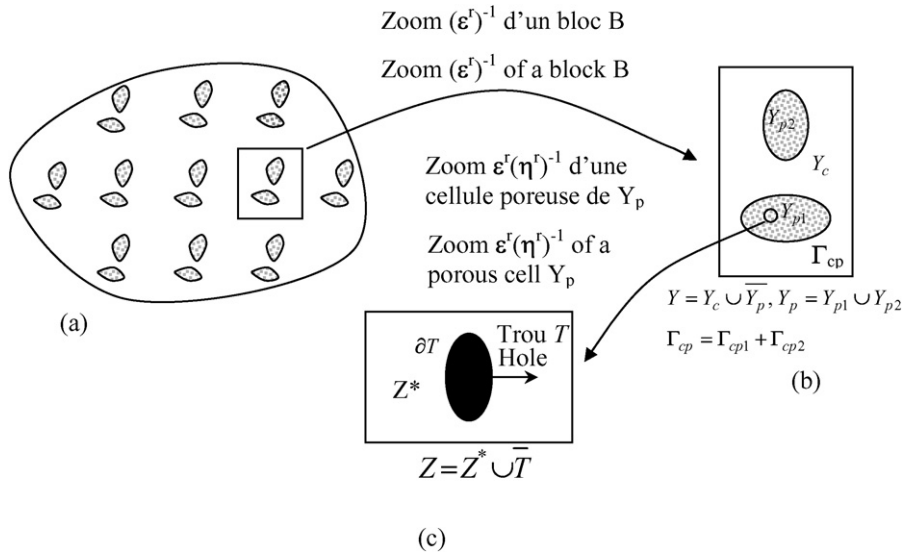


Fig. 1. (a) Représentation d'un bloc B de Σ avec parties poreuses B_p et parties compactes B_c ; (b) Cellule Y ; (c) Cellule Z .
Fig. 1. (a) Representation of a block B of Σ with the porous parts B_p and the compact parts B_c ; (b) Cell Y ; (c) Cell Z .

droite Σ occupée par le matériau ; elle est nulle sur la frontière $\partial \Sigma$. Lorsque Σ^ε est multiconnexe (cas d'un arbre perforé ou poreux), les conditions aux limites sur les bords $\partial \Sigma_q$ des perforations, impliquent une condition intégrale sur chacune de ces courbes fermées pour assurer l'uniformité du champ de déplacements ; cette condition génère une complexité supplémentaire au modèle mathématique [1–3].

Nous aborderons ici le cas d'une section multiconnexe présentant une première distribution « ε^r -périodique » de zones poreuses ; ces dernières comportant une seconde distribution « η^r -périodique » de pores.

On distingue dans Σ^ε , d'une part les zones compactes dont la réunion sera désignée par Σ_c^ε , d'autre part les parties pleines des zones poreuses dont la réunion sera désignée par Σ_p^ε . Il existe aux interfaces entre Σ_c^ε et Σ_p^ε un contraste d'échelles $\langle \langle \varepsilon^r, \eta^r \rangle \rangle$ susceptibles d'y générer des couches limites, lesquelles vont se traduire par d'éventuelles discontinuités lorsque ε et η tendent vers 0.

2. Explicitation du contexte bipériodique considéré

Dans la situation bipériodique qui nous concerne (cf. Fig. 1(a)) chaque zone perforée ou poreuse appartient à une première période d'ordre ε^r appelée « bloc » B ; le complémentaire B_c des zones poreuses B_p dans chaque bloc est appelé zone compacte. Nous devons alors considérer de plus une deuxième échelle microscopique η^r correspondant à la période de distribution des pores dans les zones poreuses B_p ; en fait : $\varepsilon^r = \max\{\varepsilon_1^r, \varepsilon_2^r\}$ et $\eta^r = \max\{\eta_1^r, \eta_2^r\}$.

Les nombres ε^r et η^r désignent ici les périodes réelles réduites, respectives, pour la direction \vec{e}_γ (pour $\gamma = 1$ et 2), de distribution des blocs dans la section Σ et des pores dans la partie B_p des blocs.

2.1. Idées générales de base pour une homogénéisation monopériodique

Lorsqu'on est en présence d'un milieu hétérogène monopériodique que l'on souhaite homogénéiser [4], on commence par caractériser la taille (réduite) de la période en posant (dans \mathbb{R}^2 par exemple) : $\varepsilon^r = \max\{\varepsilon_1^r, \varepsilon_2^r\}$, ε_γ^r représentant le côté de la période réelle (microscopique) ; puis on effectue un zoom de rapport $(\varepsilon^r)^{-1}$ qui envoie cette période sur un pavé Y d'ordre unité, de côtés : $b_\gamma = \varepsilon_\gamma^r / \varepsilon^r$. A partir de là, on génère un processus asymptotique en opérant sur Y une similitude inverse de rapport ε , $\varepsilon \in]0, \varepsilon^r]$ qui va associer à Y un recouvrement ε -périodique du domaine réel de départ, par des cellules microscopiques de côtés : $\varepsilon_\gamma = \varepsilon b_\gamma = (\varepsilon / \varepsilon^r) \varepsilon_\gamma^r$, lesquels tendent vers 0 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

A chaque point du domaine réel de départ, représenté par la variable macroscopique $\underline{x} = (x_1, x_2)$, on peut associer sa position : $\underline{y} = \underline{x} / \varepsilon$, dans le pavé fixe de référence.

2.2. Adaptation de la méthode au contexte bipériodique

Au domaine plan Σ , on associe deux pavés de référence à l'aide de deux zooms successifs. Le premier zoom (cf. Fig. 1(b)), analogue à celui décrit pour le cas monopériodique doit être un peu détaillé ci-dessous pour mieux expliquer les contraintes intervenant au niveau du deuxième. Le domaine Σ peut être recouvert de manière périodique par des blocs B_{ε^r} de taille ε^r . Le zoom $(\varepsilon^r)^{-1}$ associe à chacun de ces blocs un bloc B dont la taille est de l'ordre de l'unité. Tous les blocs B ainsi obtenus peuvent, quitte à faire une translation, être associés à un même pavé $Y =]0, l_1] \times]0, l_2]$ fixé dans \mathbb{R}^2 et $B_{\varepsilon^r} = (\varepsilon/\varepsilon^r)B = \varepsilon(Y + \underline{h})$, avec $\underline{h} = \underline{k}\underline{l} = (k_1l_1, k_2l_2)$ où \underline{k} est un multi-entier. Ainsi à chaque \underline{x} dans Σ est associé un seul \underline{y} dans Y via la relation : $\underline{x} = \varepsilon(\underline{y} + \underline{h})$. Remarquons que dans cette relation $\varepsilon\underline{h}$ représente l'origine du bloc B_{ε^r} dans Σ . Le pavé Y consiste alors en deux parties séparées par une frontière Γ_{CP} (cf. Fig. 1(b)) : une première partie Y_C qui correspond aux images des points \underline{x} de la zone compacte de Σ_C^ε , et une deuxième partie Y_P qui correspond aux images des points \underline{x} de la zone poreuse de Σ_P^ε . Comme dans le premier processus, cette seconde partie Y_P peut être recouverte par des blocs $B'_{(\eta^r/\varepsilon^r)}$ de taille η^r/ε^r . Par un deuxième zoom $(\eta^r)^{-1}\varepsilon^r$, on peut associer à chacun de ces blocs un bloc B' dont la taille est de l'ordre de l'unité. Tous ces blocs B' peuvent, quitte à faire des translations, être ramenés à un pavé fixe $Z =]0, l'_1] \times]0, l'_2]$ dans \mathbb{R}^2 (cf. Fig. 1(c)) : $B'_{(\eta^r/\varepsilon^r)} = \eta(\varepsilon^r/\eta^r)B' = \eta(Z + \underline{h}')$ où $\underline{h}' = \underline{k}'\underline{l}' = (k'_1l'_1, k'_2l'_2)$ avec $\underline{k}' \in \mathbb{Z}^2$. Ainsi à chaque \underline{y} dans Y_P est associé de manière unique à un \underline{z} de Z par la relation : $\underline{y} = \eta(\underline{z} + \underline{h}')$. On peut remarquer que dans cette relation $\eta\underline{h}'$ représente l'origine du bloc $B'_{(\eta^r/\varepsilon^r)}$ dans Y . Reste alors à effectuer le passage à la limite simultané : $\varepsilon \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0$, en respectant les ordres de grandeurs relatifs des paramètres initiaux ε^r et η^r de la manière suivante : $\eta = \varepsilon^\delta$, avec $\delta = \ln \eta^r / \ln \varepsilon^r$.

3. Énoncé du problème posé

On cherche, dans ce contexte bipériodique, à caractériser le comportement global à la torsion de l'arbre cylindrique correspondant. La réduction dimensionnelle du problème physique conduit au modèle adimensionnel suivant [5] :

$$(\mathbb{P}^\varepsilon) \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left\{ a^\varepsilon(x) \frac{\partial \theta^\varepsilon}{\partial x_\alpha} \right\} = 2 & \text{dans } \Sigma^\varepsilon \\ \text{avec } a^\varepsilon(x) = \phi^{P^\varepsilon}(x) + \phi^{C^\varepsilon}(x) \\ \phi^{P^\varepsilon}(x) \nabla \theta^\varepsilon = 0 & \text{dans } T^\varepsilon \\ \int_{\partial T^\varepsilon} \phi^{P^\varepsilon}(x) \left[\gamma^* \frac{\partial \theta^\varepsilon}{\partial n} \right] ds^\varepsilon = 2 \int_{T^\varepsilon} \phi^{P^\varepsilon}(x) dS^\varepsilon \\ \theta^\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial \Sigma \end{cases}$$

Dans cet énoncé, T^ε désigne chaque trou de Σ et θ^ε « fonction réduite de contraintes » dont dérive le tenseur des contraintes σ_{ij}^ε par les relations suivantes : $\sigma_{ij}^\varepsilon = 0$ sauf $\sigma_{13} = \sigma_{31} = \partial \theta^\varepsilon / \partial x_2$ et $\sigma_{23} = \sigma_{32} = -\partial \theta^\varepsilon / \partial x_1$; ϕ^{P^ε} et ϕ^{C^ε} désignent les fonctions caractéristiques, respectives de Σ_P^ε et Σ_C^ε , le symbole $\gamma^*_{\partial T^\varepsilon}$ signifiant « trace sur ∂T^ε côté solide » de l'argument qui suit.

On note que si Ω est un domaine de \mathbb{R}^n , $\Omega_q \subset \Omega$ un sous-domaine de Ω , on appellera fonction caractéristique de Ω_q la fonction ϕ^{Ω_q} définie presque partout par $\phi^{\Omega_q}(x) = 1$ si $x \in \Omega_q$ et 0 si $x \notin \Omega_q$.

Remarque. La réduction dimensionnelle du problème physique a été effectuée à partir de la contrainte caractéristique μ (qui représente le coefficient de cisaillement de l'élasticité classique isotrope), et de la hauteur h du cylindre. On s'est débarrassé de l'angle de torsion α (qui est ici une constante) par le changement de la fonction inconnue.

4. Méthodes et résultats

A chaque point du domaine Σ réel de départ, représenté par la variable macroscopique $\underline{x} = (x_1, x_2)$, on peut associer les positions :

$$y = \underline{x}/\varepsilon \quad \text{et} \quad z = \underline{x}/\eta \tag{1}$$

respectivement dans les pavés fixes de référence $Y =]0, l_1] \times]0, l_2]$ et $Z =]0, l'_1] \times]0, l'_2]$ dans \mathbb{R}^2 .

Afin de mieux se concentrer sur les difficultés réelles d’homogénéisation bipériodique des milieux perforés, nous proposons quelques simplifications qui vont permettre (sans restreindre la généralité des techniques utilisées) de traiter ici le cas particulier $\eta = \varepsilon^2$ et nous supposons enfin que tous les pores sont identiques et qu’il n’y en a qu’un par période poreuse ; nous désignons par T , l’image de ce pore dans Z et par Z^* le complémentaire de $T \cup \partial T$ dans Z .

Compte tenu de sa définition, il est évident que le coefficient $a^\varepsilon(x)$ ne va dépendre que de la position du point x dans le bloc B auquel il appartient et, si $x \in B_P$, de celle dans la cellule poreuse correspondante. Compte tenu de (1), cette propriété se traduit par :

$$a^\varepsilon(x) = a(y, z) \tag{2}$$

où $a(\cdot)$ est une fonction $Y \times Z$ -périodique donnée par :

$$a(y, z) \stackrel{\text{déf}}{=} \phi^P(y)\phi^{Z^*}(z) + \phi^C(y) \quad \text{pour } (y, z) \in Y \times Z \tag{3}$$

Dans cette définition, ϕ^P , ϕ^C d’une part et ϕ^{Z^*} d’autre part, désignent les fonctions caractéristiques (respectivement Y et Z -périodiques) des parties poreuses Y_P et compactes Y_C , de Y et de la partie pleine Z^* de Z . Compte tenu du contexte décrit ci-dessus, on va chercher la solution θ^ε du problème sous la forme du développement asymptotique :

$$\theta^\varepsilon(x) = \sum_{q \geq 0} \varepsilon^q \theta_q(x, y, z) \tag{4}$$

dans laquelle y et z représentent les variables locales dans les cellules de références Y et Z .

On postule que pour chaque q ,

$$\theta_q(x, y, z) = \phi^P(y)\theta_{qP}(x, y, z) + \phi^C(y)\theta_{qC}(x, y) \tag{5}$$

est continu presque partout sur $\Sigma \times Y \times Z$ et simultanément Y -périodique et Z -périodique, c’est à dire θ_q prend des valeurs égales sur deux cotés opposés de Y (respectivement, Z).

On obtient le résultat suivant :

Théorème. Pour ε très petit (donc η aussi), une bonne approximation de la solution θ^ε du problème (\mathbb{P}^ε) est représentée par θ_0 vérifiant le problème homogénéisé (\mathbb{P}^0) suivant :

$$(\mathbb{P}^0) \quad \begin{cases} \theta_0 \text{ application de } \Sigma \text{ dans } \mathbb{R} \\ -H_{\beta\gamma} \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial x_\beta \partial x_\gamma} = 2(1 - D) \quad \text{sur } \Sigma \\ \theta_0 = 0 \quad \text{sur } \partial \Sigma \end{cases} \tag{6}$$

avec :

$$\begin{cases} H_{\beta\gamma} = \frac{1}{|Y||Z|} \int_Y Q_{\beta\eta} \frac{\partial}{\partial y_\eta} [y_\gamma - \xi^\gamma] dy; & Q_{\alpha\beta} = q_{\alpha\beta} \phi^P + |Z^*| \delta_{\alpha\beta} \phi^C; & q_{\alpha\beta} = \int_Z \nabla_z \chi^\alpha \cdot \nabla_z \chi^\beta dz + |Z| \delta_{\alpha\beta} \\ D = \frac{|Y_P||T|}{|Y||Z|} \end{cases} \tag{7}$$

et ξ^γ , χ^α solutions définies presque partout respectivement sur Y et Z par :

$$\begin{cases} -q_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \xi^\gamma}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} = 0 \quad \text{dans } Y_P \\ -|Z^*| \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \xi^\gamma}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} = 0 \quad \text{dans } Y_C \\ \left[\left[Q_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial y_\beta} \right] \right]_{\Gamma_{CP}} n_\alpha = \left[\left[Q_{\alpha\gamma} \right] \right]_{\Gamma_{CP}} n_\alpha \text{ le long de } \Gamma_{CP} \\ \int_Y \xi^\gamma dy = 0 \end{cases} \tag{8}$$

et

$$\begin{cases} -\Delta_{zz}\chi^\alpha = 0 & \text{dans } Z^* \\ \chi^\alpha(z) = z_\alpha & \text{dans } T \\ \chi^\alpha \text{ Z-périodique.} \end{cases} \tag{9}$$

Le symbole $[[g]]_{\Gamma_{CP}}$ désigne le saut de la grandeur g à travers la frontière entre parties compacte et poreuse de Y et la notation $|\Omega|$ représente la mesure du domaine Ω .

Remarque. On constate sur cette forme locale (8) du problème sur Y , qu’il était réaliste de prévoir, dès le départ de la modélisation, l’existence d’éventuelles discontinuités ou couches limites pour la solution au passage de la frontière entre parties poreuses et compactes de la section Σ .

D’autre part, le second membre de l’équation homogénéisée de (6) vérifiée par θ_0 est perturbé par le terme $D = \frac{|Y_P||T|}{|Y||Z|}$ qui est naturellement nul lorsque’il n’y a pas de pores (i.e., $|T| = 0$). Ce terme peut être interprété comme une densité de porosité [6,7].

La rigidité équivalente à la torsion est donnée par $R_t = 2(1 - D) \int_\Sigma \theta_0(x) dx$ ce qui met en évidence un affaiblissement du module de rigidité, d’autant plus significatif que les proportions relatives de parties poreuses dans Σ et de trous dans la partie poreuse sont plus grandes.

Démonstration. Dans les nouvelles variables (1), $\partial/\partial x_\alpha$ sera décrit :

- Par $\eta^{-1} \partial/\partial z_\alpha + \varepsilon^{-1} \partial/\partial y_\alpha + \partial/\partial x_\alpha$ sur les parties poreuses.
- Par $\varepsilon^{-1} \partial/\partial y_\alpha + \partial/\partial x_\alpha$ sur les parties compactes.

En utilisant la méthode des échelles multiples [4], combinée avec le développement de Taylor [5] pour la relation intégrale sur ∂T^ε du problème (\mathbb{P}^ε) et en choisissant l’origine des z_α au barycentre de T , on montre que les différents termes θ_q de (4) vérifient les problèmes (\mathbb{P}_q) suivants :

$$(\mathbb{P}_q) \begin{cases} \text{Trouver } \theta_q(x, y, z) = \phi^P(y)\theta_{qP}(x, y, z) + \phi^C(y)\theta_{qC}(x, y) \text{ définie sur } \Sigma \times Y \times Z \text{ telle que :} \\ -\phi^P \Delta_{zz}\theta_q = F_q & \text{sur } \Sigma \times Y \times Z^* \\ \nabla_z \theta_{qP} = G_{qP} & \text{sur } \Sigma \times Y_P \times T \\ \phi^P \int_{\partial T} \gamma^* \frac{\partial \theta_q}{\partial n} ds = I_q & \text{sur } \Sigma \times Y \\ \theta_q \text{ Z-périodique} \end{cases}$$

avec F_q, G_{qP} et I_q définis respectivement par :

$$\begin{cases} -\phi^P \Delta_{zz}\theta_q = F_q & \text{presque partout sur } \Sigma \times Y \times Z^* \\ \text{avec} \\ F_0 = 0, & F_1 = \phi^P \Delta_{yz}\theta_0 + \nabla_y \cdot (\phi^P \nabla_z \theta_0) \\ F_2 = \phi^P (\Delta_{yz}\theta_1 + 2\Delta_{zX}\theta_0) + \nabla_y \cdot [\phi^P \nabla_z \theta_1 + a \nabla_y (a\theta_0)] \\ F_3 = \phi^P (\Delta_{yz}\theta_2 + 2\Delta_{zX}\theta_1) + \nabla_y \cdot [\phi^P \nabla_z \theta_2 + a \nabla_y (a\theta_1) + a \nabla_X \theta_0] + a \Delta_{Xy} (a\theta_0) \\ F_4 = \phi^P (\Delta_{yz}\theta_3 + 2\Delta_{zX}\theta_2) + \nabla_y \cdot [\phi^P \nabla_z \theta_3 + a \nabla_y (a\theta_2) + a \nabla_X \theta_1] + a \Delta_{Xy} (a\theta_1) + a \Delta_{XX} \theta_0 + 2a \\ a(y, z) = \phi^P(y) + \phi^C(y) & \text{sur } Y \times Z^* \\ \nabla_z \theta_{qP} = G_{qP} & \text{sur } \Sigma \times Y_P \times T \\ \text{avec par définitions } G_{qP}, \text{ restriction à } \Sigma \times Y_P \times T, \text{ des champs vectoriels de } \mathbb{R}^2 \\ G_0 = 0, & G_1 = -\nabla_y (a\theta_0) \\ \text{et pour } q \geq 0 : & G_q = -[\nabla_y (a\theta_{q-1}) + a \nabla_X \theta_{q-2}] \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{k,0} = \phi^P w_k = \phi^P (\nabla_z \theta_{k+2} - G_{k+2}) \\ v_{k,1} = z_\alpha \frac{\partial}{\partial y_\alpha} (\phi^P w_k) \\ v_{k,2} = \left[z_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2} z_\alpha z_\beta \frac{\partial^2}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} \right] (\phi^P w_k) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \phi^P \int_{\partial T} \gamma^* \frac{\partial \theta_q}{\partial n} ds = I_q \quad \text{avec } I_0 = 0 \\ I_q = \phi^P \int_{\partial T} \gamma^* G_q \cdot n ds - \sum_{k=-2}^{q-3} \int_{\partial T} \gamma^* v_{k,q-2-k} \cdot n ds + C_{q-2} \quad \text{pour } q > 0 \\ C_{q-2} = 0 \quad \text{pour } q \neq 4 \text{ et } C_2 = 2|T|\phi^P \end{cases}$$

La résolution des problèmes (\mathbb{P}_q) pour les valeurs de $q = 0$ à $q = 4$ en adoptant les cadres fonctionnels tels :

- $W(Z) = \{\varphi \mid \text{restriction à } Z \text{ d'éléments de } H^1(\mathbb{R}^2) \text{ et } Z\text{-périodiques}\}$;
- $\dot{W}(Z) = W(Z)/R$, ensemble des classes dé finies par la relation d'équivalence $R : \varphi R \psi \Leftrightarrow \varphi - \psi$ indépendant de z ;
- $\dot{E}_q(Z) = \{\varphi \in \dot{W}(Z) \text{ et } \nabla_z \varphi = G_{qp} \text{ presque partout sur } T\}$, etc., entraîne le résultat du théorème précédent. \square

5. Conclusions

Nous obtenons des coefficients homogénéisés prenant bien en compte toutes les fluctuations de la structure, mais nous constatons de plus, une perturbation du second membre de l'Éq. (6) faisant apparaître le coefficient D pouvant être interprété comme un coefficient d'affaiblissement de la rigidité dû à la présence de la porosité.

Références

- [1] D. Cioranescu, J. Saint Jean Paulin, H. Lanchon, Elastic plastic torsion of heterogeneous cylindrical bars, *J. Inst. Math. Appl.* 24 (1979) 353–378.
- [2] R. Glowinski, H. Lanchon, Torsion élastoplastique d'une barre cylindrique de section multiconnexe, *J. Mécanique* 12 (1972) 151–172.
- [3] H. Lanchon, Torsion élastoplastique d'un arbre cylindrique de section simplement ou multiplement connexe, *J. Mécanique* 13 (1974) 267–320.
- [4] D. Cioranescu, P. Donato, *An Introduction to Homogenization*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, Oxford University Press, Oxford, UK, 1999.
- [5] K. Taous, M.B. Taghite, H. Lanchon-Ducauquis, A. Ait Elamrani, Homogénéisation du problème de torsion élastique d'un cylindre de section multiconnexe et bipériodique, Rapport interne, Laboratoire de Mathématiques et d'Applications de Metz, 2004.
- [6] E. Dieulesaint, D. Royer, *Ondes élastiques dans les solides, Applications au traitement de signal*, Masson et Cie, Paris, 1974.
- [7] J. Lemaitre, J.L. Chaboche, *Mécanique des matériaux solides*, Dunod, Paris, 1985.